BRAGANTIA

Revista Científica do Instituto Agronômico do Estado de São Paulo

Vol. 36 Campinas, janeiro de 1977 N.º 3

DELINEAMENTOS (1/5)(5^3) (1)

ARMANDO CONAGIN e JOASSY DE PAULA NEVES JORGE (2), *Divisão de Plantas Alimentícias Básicas, Instituto Agronômico*

SINOPSE

É descrita a análise estatística de um grupo especial de fatoriais fracionados (1/5) (5^3), utilizando os modelos quadrático e com raiz quadrada; tal estudo foi desenvolvido pelos autores visando principalmente sua aplicação em experimentos agronômicos com fertilizantes.

Estes delineamentos fatoriais se originaram da superposição de três dos quatro quadrados latinos ortogonais 5x5, sendo obtidos três conjuntos básicos, designados por Tipo I, II, III, Tipo I, II, IV e Tipo I, III, IV; o último deles é apresentado:

111	245	324	453	532
222	351	435	514	143
333	412	541	125	254
444	523	152	231	315
555	134	213	342	421

O modelo quadrático com dez parâmetros é dado por:

$$Y_{ijk} = \beta_0 \xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{1k}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{2k}\xi_{2k} +$$
$$+ \beta_{1i1j}\xi_{1i1j} + \beta_{1i1k}\xi_{1i1k} + \beta_{1j1k}\xi_{1j1k} + \xi_{ijk} \qquad \text{(A)}$$

em que $\xi_{1m} = \alpha_1 + X_m$, $\xi_{2m} = \alpha_2 + \gamma_2 X_m + X_m^2$, com $m = i,j,k$; os níveis em cada fator variam de 1 a 5; com as condições de ortogonalidade

$\sum \xi_{1m} = 0$, $\sum \xi_{2m} = 0$, $\sum \xi_{1m}\xi_{2m} = 0$, resulta $\xi_{1m} = -3 + X_m$ e $\xi_{2m} = 7 - 6X_m + X_m^2$, de onde se tem: $\xi_{11} = -2$; $\xi_{12} = -1$; $\xi_{13} = 0$; $\xi_{14} = 1$; $\xi_{15} = 2$; $\xi_{21} = 2$; $\xi_{22} = -1$; $\xi_{23} = -2$; $\xi_{24} = -1$; $\xi_{25} = 2$, para cada índice i, j, k.

(1) Trabalho apresentado na IX Conf. int. de Biometria. Boston, Ma., USA em agosto de 1976. Recebido para publicação em 20 de julho de 1976.

(2) Com bolsas de suplementação do C.N.Pq.

O coeficiente linear para cada fator pode ser estimado independentemente; os coeficientes quadráticos e das interações linear x linear são estimados a partir de uma matriz simétrica completa 6 x 6. Conseqüentemente, na análise da variância as somas de quadrados dos componentes lineares são independentes, mas as somas de quadrados dos componentes quadráticos e das interações são confundidas e, por isso, testadas conjuntamente. Se a contribuição de um fator e sua interação com os outros são negligíveis, podem ser calculadas estimativas independentes dos coeficientes linear e quadrático dos outros dois fatores e sua interação correspondente. Por outro lado, se todos os fatores são importantes mas suas interações são negligíveis, os coeficientes lineares e quadráticos de cada fator são estimados independentemente.

O modelo polinomial com raiz quadrada pode ser representado na mesma forma (A), com os valores:

$\xi_{1m} = \alpha_1 + \sqrt{X_m}$ e $\xi_{2m} = \alpha_2 + \gamma_2\sqrt{X_m} + X_m$, onde m = i,j,k;

$\sum\xi_{1m} = 0$, $\sum\xi_{2m} = 0$ e $\sum\xi_{1m}\xi_{2m} = 0$, dando:

$\xi_{1m} = -1{,}67646 + \sqrt{X_m}$, $\xi_{2m} = 2{,}41157 - 3{,}22798\sqrt{X_m} + X_m$, o que resulta:

$\xi_{11} = -0{,}67646$; $\xi_{12} = -0{,}26226$; $\xi_{13} = 0{,}05554$; $\xi_{14} = 0{,}32354$;

$\xi_{15} = 0{,}55964$; $\xi_{21} = 0{,}18359$; $\xi_{22} = -0{,}15342$; $\xi_{23} = -0{,}17928$;

$\xi_{24} = -0{,}04438$ e $\xi_{25} = 0{,}19349$, para cada fator i, j, k.

Neste modelo, com exclusão de β_0, os coeficientes para cada fator e para as respectivas interações são estimados a partir de uma matriz simétrica completa 9x9; assim, com exceção da soma de quadrados correspondente a β_0, que pode ser calculada isoladamente, teremos uma única soma de quadrados representando todos os outros coeficientes, que serão, por isso, testados englobadamente.

Quando as três interações, ou quando um fator principal e suas interações são negligíveis, o modelo com raiz quadrada apresenta as mesmas propriedades que o modelo quadrático.

Assumindo a não existência de interações, pode-se utilizar o modelo de Mitscherlich

$$Y = A\ [1 - 10^{-c(x+b)}]$$

para avaliação da resposta de cada fator, a partir dos totais marginais correspondentes.

Pode-se ainda obter uma avaliação extra a partir da diagonal principal do delineamento, que representa a resposta a quantidades crescentes, em níveis iguais, para os três fatores.

Com vistas à avaliação do incremento devido ao uso da adubação e ainda uma visualização extra do efeito de calcário e calcário mais micronutrientes, podem ser adicionados ao delineamento (1/5) (5x5x5) alguns tratamentos extras para melhor atingir esse objetivo: o tratamento 000, o tratamento 333+(Ca+Mg) e o tratamento 333+(Ca+Mg)+micronutrientes, possivelmente com duas repetições para cada um deles. Se se desejar avaliar a adequação do modelo utilizado, podem ser colocados mais quatro ou cinco pontos no nível 333.

Usando uma amplitude apropriada das dosagens (evitando platô nas respostas), este grupo de delineamentos possibilita uma análise mais eficiente da curvatura da superfície de resposta na área da decisão econômica. Se os modelos são usados sem as interações, a estimação dos parâmetros, de forma independente, para os modelos quadrático, com raiz quadrada e Mitscherlich, pode ser facilmente conseguida. Estas propriedades são de grande interesse nos estudos econômicos de programas de fertilizantes para países em desenvolvimento.

Com a ajuda de uma rede de experimentos deste tipo, podem ser obtidos estudos econômicos com macronutrientes como nitrogênio, fósforo e potássio, por exemplo, com cinco níveis de cada fator, com experimentos de tamanho médio.

1 — INTRODUÇÃO

Nos estádios iniciais da experimentação, procurava-se estudar a ação de certo fator, em vários níveis, para condições prefixadas dos demais fatores que poderiam influir nos resultados.

Fisher introduziu o conceito da experimentação fatorial em que se procurava avaliar a ação conjunta de vários fatores, inicialmente em dois níveis e posteriormente em três ou mais. Buscava-se avaliar não só a ação desses fatores como a importância de suas interações.

A pesquisa de vários fatores (três ou mais) em dois ou mais níveis, em experimentos fatoriais completos, levava à necessidade de utilização de um número grande de unidades experimentais, tornando muito difícil a execução dos experimentos, aumentando a variabilidade dos resultados e encarecendo o processo.

Os delineamentos fatoriais 2^n são apropriados para os trabalhos exploratórios. O delineamento possibilita o estudo de efeitos principais e interações em experimentos em que são estudados os efeitos de vários fatores em dois níveis. Tem sido bastante usado principalmente quando $n \leqslant 5$ **(7, 14)**. Quando são cinco ou mais fatores e as observações são difíceis de ser obtidas e, além disso, apresentam custo elevado, é possível utilizar a técnica da repetição fracionada, proposta por Finney, fazendo-se o confundimento de algumas interações **(7, 13)**.

Já em trabalhos mais informativos, os níveis de cada um dos fatores deverão ser pelo menos três. Com relação a esse aspecto, delineamentos 3x3, 3x3x3, 4x4, 4x4x4, 3x4x4, 2x4x4 e outros têm sido usados na pesquisa. Se forem três ou mais fatores em mais de três níveis, repetições fracionadas desses delineamentos, como por exemplo (1/3) (3x3x3x3) (1/4) (4x4x4), têm sido utilizadas, devido às dificuldades de instalação e alto custo decorrentes da utilização de grande número de unidades experimentais.

Durante muitos anos a enfatização foi dada quase exclusivamente no teste (avaliação da significância) dos efeitos principais e interações.

Só esporadicamente tentou-se, nos primeiros tempos da estatística moderna, o uso de modelos estatísticos e o estudo da função de resposta. Um dos primeiros trabalhos sobre o assunto foi o de Wishart **(20, 32)**, que preconizou o uso de polimônios ortogonais em estudos de crescimento de porcos em função da variação dos níveis nutricionais; os polinômios foram usados como uma forma prática de aproximação para a verdadeira função de resposta.

A busca de modelos funcionais para descrever o crescimento levaram ao uso de funções como a de Gompertz **(31)**, a logística **(25)** etc.

Um campo em que as curvas de resposta foram consideradas pela primeira vez é o constituído pelo estudo agronômico da reposta da planta a diferentes níveis de adubação e espaçamentos. Uma primeira tentativa foi a de Mitscherlich **(22)**; um trabalho de grande repercussão, usando a equação de Mitscherlich, e que levou à implantação de uma política de uso de fertilizantes foi efetuado por Crowther e Yates **(9)**, na Inglaterra, durante a II Guerra; foi efetuada análise de grandes grupos de experimentos de fertilizantes, abrangendo várias culturas; muitos dos experimentos eram do tipo fatorial 2x2x2 e 3x3x3.

A partir de 1951, com Box e Wilson **(6)**, surgiram os delineamentos do tipo Central Composto que visavam à obtenção de uma superfície de resposta e o estudo de suas propriedades, principalmente a determinação de pontos extremos **(4, 7, 10)**.

Foram propostos delineamentos simétricos e alguns assimétricos, quando se supunha o conhecimento da direção da área de crescimento da função. Surgiram então muitas variações:

a) Para estudos exploratórios foram utilizados modelos dos tipos

$$Y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{iu} + \varepsilon_u \quad \text{e}$$

$$Y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{iu} + \sum_{i \neq j}^{k} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon_u$$

e delineamentos usando partes de um fatorial do tipo 2^k, convenientemente escolhidas (fractional replication), de modo a assegurar a estimativa da função de resposta pretendida.

b) Para o estudo de k fatores em cinco níveis, através de modelos de segunda ordem, na forma de funções quadráticas do segundo grau, que incluíam os efeitos lineares e quadráticos e as interações simples duas a duas, com o modelo

$$Y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{iu} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} X_{iu}^2 + \sum_{i \neq j}^{k} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon_u,$$

foram desenvolvidos delineamentos simétricos do tipo $2^k + 2(k) + n_1$, composto de um fatorial 2^k, uma estrela $2(k)$ e n_1 pontos no centro do delineamento (para estimar a variância e a adequação do modelo empregado).

No caso de três fatores, por exemplo, o delineamento seria $2^3 + 2(3) + 1 = 15$ tratamentos, podendo ter 20 tratamentos se fizermos $n_1 = 6$ (6 pontos no centro, proporcionando 5 graus de liberdade para a estimativa da variância para teste de adequação do modelo). Neste exemplo, além do fatorial 2^3, é adicionada uma estrela composta de dois pontos (pontas da estrela) situados às distâncias $-\alpha$ e $+\alpha$ em cada um dos três eixos (correspondentes a cada fator) que passam pelo ponto 000.

Com vistas ao encontro de estimativas independentes dos coeficientes da função de resposta, determinaram-se valores de α que possibilitaram a ortogonalização do modelo e a obtenção de uma classe de centrais compostos conhecidos como centrais compostos ortogonais **(5, 23)**.

Visando à obtenção de delineamentos que possibilitam a mesma variância para os pontos que estão a uma mesma distância do ponto central do delineamento foram criados os tipos compostos rotacionais **(5, 23)**. Com vistas à obtenção de delineamentos em blocos de tamanho menor, foram desenvolvidos delineamentos do tipo Central Composto em blocos incompletos **(5, 11, 23)**; para os rotacionais, os tratamentos foram grupados em duas partes **(7, 23)**.

Em todos esses delineamentos posteriores a Box e Wilson, está sendo dada uma enfatização maior ao estudo das propriedades do modelo e principalmente à determinação das propriedades da superfície de resposta (pontos extremos etc.).

Nos casos em que se busca a otimização de um processo, como nas pesquisas industriais, de investigação química etc., e em que os erros experimentais são baixos e o processo é repetitivo no tempo, pode ser utilizado o método de caminhamento ascendente ótimo (steepest ascent) e o experimento, executado seqüencialmente **(7, 10, 23)**.

Nos experimentos de adubação, nos quais se procura obter a recomendação para o uso ótimo de dosagens de NPK, por exemplo, que proporcionem a maior rentabilidade ao agricultor, todas as unidades de cada experimento devem ser localizadas no mesmo lugar e no mesmo ano agrícola. As variações anuais deverão ser avaliadas repetindo o experimento dois ou três anos, lado a lado, ou usando outras técnicas que possibilitem a cobertura das variações climáticas, de solo e de fertilidade. As respostas devidas às diferenças ecológicas devem ser asseguradas através da execução de uma rede adequada de experimentos, de forma a possibilitar a avaliação das respostas dos nutrientes para os vários estratos ecológicos existentes.

No campo agronômico, nas pesquisas com fertilizantes NPK, foram bastante utilizados, no passado, os experimentos fatoriais, inicialmente os 2^3 e, posteriormente, os 3^3, os do tipo 4x4x2 e outros semelhantes **(26)**.

Na Inglaterra, na Índia, nos Estados Unidos e em outros países, incluindo o Brasil, redes de experimentos fatoriais NPK do tipo 3x3x3, em blocos de nove, foram conduzidas com diferentes culturas, **(1, 16, 18, 21)**, de forma a estimar as respostas para as diferentes condições ecológicas. Os ensaios de cada uma das culturas foram reunidos em grupos que pudessem representar os mesmos estratos e analisados economicamente, usando Mitscherlich e a polinomial quadrática que inclui no modelo as interações de dois fatores (componente linear x linear) **(18, 29)**.

Entretanto, no Brasil, em muitos casos, apareceram "pontos de sela", que dificultavam as análises econômicas.

Na busca de delineamentos mais satisfatórios para contornar estes problemas, alguns pesquisadores tentaram, no Brasil, o delineamento central composto do tipo $2^3+2\times3+1$, com duas repetições, porém, na análise foi verificado que os pontos de sela continuaram **(21)**.

Alguns tipos novos representando pequenas variações nos modelos de Box foram propostos, como o $2^3+2^3+2^3+2\times3+1$ **(28)**, o 2^3+ $+2^3+2\times3+1$ **(30)**, o $2^3+6\times3+1$ **(24)**.

Em 1968, com vistas à pesquisa de novas soluções, os autores apresentaram em uma Reunião de Fertilidade, no Uruguai, uma análise do delineamento tipo Box, com dois cubos, do tipo $2^3+2^3+4\times3+1$ em que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ (8).

No presente trabalho os autores desenvolvem o delineamento (1/5) (5^3), que se constitui em uma repetição fracionada do 5x5x5, susceptível de ser analisado, entre outros modelos, por um polinomial quadrático com 10 parâmetros, por um modelo polinomial do tipo raiz quadrada também com 10 parâmetros; a partir dos totais marginais, pode ser analisado pela equação de Mitscherlich avaliada fator a fator (e que passa pelos totais marginais correspondentes aos cinco níveis de cada fator), e, ainda, eventualmente, por outros modelos (Cobb-Douglas, Gompertz, logística), ou ainda pelos modelos pertencentes à "família de platô linear" (3).

Acreditam os autores que este delineamento tem um tamanho bastante adequado, apresentando número suficiente de níveis para a pesquisa com fertilizantes; possibilita o estudo de várias relações entre os níveis dos elementos químicos, desde níveis equilibrados (variando as quantidades dos elementos) até relações variáveis entre dois fatores para um dado nível do terceiro fator.

2 — CARACTERÍSTICAS DO DELINEAMENTO (1/5)(5^3)

O delineamento é uma repetição fracionada do 5x5x5 e abrange um grupo de 25 tratamentos, escolhidos a partir dos quadrados latinos ortogonais 5x5 existentes, em número de quatro, designados I, II, III e IV por Fisher e Yates (15). Esses quatro quadrados latinos foram escolhidos três a três, e, superpostos, possibilitaram a formação de três quadrados hiper-greco-latinos, que constituem os seguintes tipos básicos:

Tipo I, III, IV

111	245	324	453	532
222	351	435	514	143
333	412	541	125	254
444	523	152	231	315
555	134	213	342	421

Tipo I, II, III

111	345	524	253	432
222	451	135	314	543
333	512	241	425	154
444	123	352	531	215
555	234	413	142	321

Tipo I, II, IV

111	235	354	423	542
222	341	415	534	153
333	452	521	145	214
444	513	132	251	325
555	124	243	312	431

Quaisquer outras combinações dos quadrados latinos I, II, III, IV recaem em um destes três tipos básicos.

Na literatura, Cochran e Cox (7), Davies (10) e John (19) fazem referência à utilização de quadrados latinos, greco-latinos e hiper-greco-latinos para obter o fracionamento de experimentos fatoriais, considerando a utilização de linhas, colunas e letras para representar os níveis de cada um dos fatores, possibilitando o uso de três, quatro ou cinco fatores, com um número bem reduzido de pontos.

No nosso caso, utilizamos o grupo dos hiper-greco-latinos para somente três fatores, abandonando a idéia de uso de linhas e colunas para a escolha do subconjunto dos tratamentos; conseguimos, com isso, que os tratamentos da diagonal principal (apresentando igual nível para cada um dos fatores) estejam obrigatoriamente incluídos no delineamento, bem como um balanceamento entre os níveis dos fatores. Essa diagonal principal representa, na opinião dos autores, um grupo de tratamentos muito importantes. Do ponto de vista fisiológico, no caso de experimentos de adubação, esse subgrupo de tratamentos permite o estudo da variação das quantidades de nutrientes, sem mudar a relação entre os teores dos nutrientes usados nos tratamentos.

A análise estatística vai ser realizada primeiramente para o delineamento I, III, IV usando o Modelo Quadrático e o Modelo Com Raiz Quadrada, considerados pelos autores, em seu gênero, os mais promissores para serem utilizados nos experimentos de adubação. Os autores consultados para o desenvolvimento dos vários itens foram Anderson e Bancroft (2), Draper e Smith (12), Graybill (17), Myers (23), entre outros.

3 — MODELO QUADRÁTICO

Os índices i, j e k indicarão, no nosso caso, os fatores (os macronutrientes nitrogênio, fósforo e potássio, para experimentos de adubação), sendo que os níveis variarão de 1 a 5 para cada um deles. Os polinômios de 1.º grau (linear) e de 2.º grau (quadrático), a serem adaptados aos níveis de cada fator, serão designados por $_1$ e $_2$.

A equação polinomial expressa em termo dos é a seguinte:

$$\begin{aligned} Y_{ijk} = {} & \beta_0\xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{1k}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \\ & + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{2k}\xi_{2k} + \beta_{1i1j}\xi_{1i1j} + \beta_{1i1k}\xi_{1i1k} + \\ & + \beta_{1j1k}\xi_{1j1k} + \varepsilon_{ijk}, \qquad \text{(A)} \end{aligned}$$

onde os ϵ_{ijk} são variáveis aleatórias normalmente distribuídas, com média zero e variância σ^2.

O polinômio linear é dado pela relação $\xi_1 = \alpha_1 + X$ e o quadrático por $\xi_2 = \alpha_2 + \gamma_2 X + X^2$. Impostas as condições de ortogonalidade $(\sum\xi_{1it} = 0;\ \sum\xi_{2it} = 0$ e $\sum\xi_{1it}\xi_{2it} = 0)$ para o fator i, por exemplo, as expressões se tornam:

$$\xi_{1it} = -3 + X_{it} \text{ e } \xi_{2it} = 7 - 6X_{it} + X_{it}^2,\ t = 1, \ldots, 5.$$

Os coeficientes, são, respectivamente, no caso do nitrogênio:

$$\xi_{1i1} = -2;\ \xi_{1i2} = -1;\ \xi_{1i3} = 0;\ \xi_{1i4} = 1;\ \xi_{1i5} = 2$$

$$\xi_{2i1} = 2;\ \xi_{2i2} = -1;\ \xi_{2i3} = -2;\ \xi_{2i4} = -1;\ \xi_{2i5} = 2$$

Para fósforo e potássio teremos ξ_{1j}, ξ_{2j} e ξ_{1k} e ξ_{2k} com valores correspondentes aos do fator i.

Seja $\underline{Y}$ o vetor das observações, $\underline{\beta}$ o vetor dos p parâmetros (coeficientes de regressão), Ξ a matriz das coordenadas (constantes conhecidas), também chamada matriz do delineamento.

Tem-se

$$\underline{Y} \equiv \underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \varepsilon \equiv \underline{Y} - \underline{\beta}$$

Vamos estimar os parâmetros β pelo método dos quadrados mínimos, buscando o vetor $\hat{\underline{\beta}}$ que torna mínima a soma dos quadrados dos resíduos.

$$\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} = (\underline{Y} - \Xi\,\underline{\beta})'(\underline{Y} - \Xi\,\underline{\beta}) = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'\Xi\underline{\beta} - \underline{\beta}'\Xi'\underline{Y} + \underline{\beta}'\Xi'\Xi\underline{\beta}$$

$$= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\underline{\beta}'\Xi'\underline{Y} + \underline{\beta}'\Xi'\Xi\underline{\beta}$$

$$\frac{\delta\,(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon})}{\delta\underline{\beta}} = -2\Xi'\underline{Y} + 2\Xi'\Xi\underline{\beta}$$

Igualando a expressão a zero,

$$S\hat{\underline{\beta}} = \Xi'\underline{Y}$$ (sistema de equações normais)

Sendo S matriz não-singular,

$$S^{-1}S\hat{\underline{\beta}} = S^{-1}\Xi'\underline{Y}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = S^{-1}\Xi'\,\underline{Y}$$

No caso do delineamento considerado, a matriz Ξ das coordenadas, para o modelo quadrático do tipo básico (I, III, IV), é dada a seguir.

Para facilitar a visualização da matriz Ξ, suas linhas estão em correspondência com a seqüência dada aos tratamentos especificados na relação "Tratamento", e foram colocados, acima de cada uma das colunas de Ξ, os Ξ correspondentes, na mesma ordem em que aparecem na equação (A).

$\Xi =$

Tratamento	ξ_0	ξ_{1i}	ξ_{1j}	ξ_{1k}	ξ_{2i}	ξ_{2j}	ξ_{2k}	ξ_{1i1j}	ξ_{1i1k}	ξ_{1j1k}
111	1	—2	—2	—2	2	2	2	4	4	4
222	1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	1	1	1
333	1	0	0	0	—2	—2	—2	0	0	0
444	1	1	1	1	—1	—1	—1	1	1	1
555	1	2	2	2	2	2	2	4	4	4
245	1	—1	1	2	—1	—1	2	—1	—2	2
351	1	0	2	—2	—2	2	2	0	0	—4
412	1	1	—2	—1	—1	2	—1	—2	—1	2
523	1	2	—1	0	2	—1	—2	—2	0	0
134	1	—2	0	1	2	—2	—1	0	—2	0
324	1	0	—1	1	—2	—1	—1	0	0	—1
435	1	1	0	2	—1	—2	2	0	2	0
541	1	2	1	—2	2	—1	2	2	—4	—2
152	1	—2	2	—1	2	2	—1	—4	2	—2
213	1	—1	—2	0	—1	2	—2	2	0	0
453	1	1	2	0	—1	2	—2	2	0	0
514	1	2	—2	1	2	2	—1	—4	2	—2
125	1	—2	—1	2	2	—1	2	2	—4	—2
231	1	—1	0	—2	—1	—2	2	0	2	0
342	1	0	1	—1	—2	—1	—1	0	0	—1
532	1	2	0	—1	2	—2	—1	0	—2	0
143	1	—2	1	0	2	—1	—2	—2	0	0
254	1	—1	2	1	—1	2	—1	—2	—1	2
315	1	0	—2	2	2	2	2	0	0	—4
421	1	1	—1	—2	—1	—1	2	—1	—2	2

Chamando de S a matriz $\Xi'\,\Xi$, teremos:

$$
S = \begin{bmatrix}
25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 30 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 30 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 100 & 10 & 30 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 10 & 100 & 30 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 30 & 30 & 100
\end{bmatrix}
$$

A inversa S^{-1} é transcrita abaixo:

$$
S^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix}
40000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 14540 & -236 & -236 & 551 & 551 & -1785 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -236 & 16640 & -26 & 61 & -5494 & 1653 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -26 & 16640 & -5494 & 61 & 1653 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 551 & 61 & -5494 & 12820 & -142 & -3858 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 551 & -5494 & 61 & -142 & 12820 & -3858 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1785 & 1653 & 1653 & -3858 & -3858 & 12493
\end{bmatrix}
$$

O vetor $\Xi'Y$ é o que se segue:

$$
\Xi'\underline{Y} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ \\ I \\ \\ J \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\sum Y_{ijk} = Y_{...} \\
-2(Y_{1..}) -1(Y_{2..}) +1(Y_{4..}) +2(Y_{5..}) \\
-2(Y_{.1.}) -1(Y_{.2.}) +1(Y_{.4.}) +2(Y_{.5.}) \\
-2(Y_{..1}) -1(Y_{..2}) +1(Y_{..4}) +2(Y_{..5}) \\
2(Y_{1..}+Y_{5..}) -1(Y_{2..}+Y_{4..}) -2(Y_{3..}) \\
2(Y_{.1.}+Y_{.5.}) -1(Y_{.2.}+Y_{.4.}) -2(Y_{.3.}) \\
2(Y_{..1}+Y_{..5}) -1(Y_{..2}+Y_{..4}) -2(Y_{..3}) \\
4(Y_{11.}+Y_{55.}) +2(Y_{12.}+Y_{45.}+Y_{21.}+Y_{54.}) +1(Y_{44.}+Y_{22.}) - \\
-1(Y_{24.}+Y_{42.}) -2(Y_{25.}+Y_{41.}+Y_{14.}+Y_{52.}) -4(Y_{15.}+Y_{51.}) \\
4(Y_{1.1}+Y_{5.5}) +2(Y_{1.2}+Y_{4.5}+Y_{2.1}+Y_{5.4}) +1(Y_{4.4}+Y_{2.2}) - \\
-1(Y_{2.4}+Y_{4.2}) -2(Y_{2.5}+Y_{4.1}+Y_{1.4}+Y_{5.2}) -4(Y_{1.5}+Y_{5.1}) \\
4(Y_{.11}+Y_{.55}) +2(Y_{.12}+Y_{.45}+Y_{.21}+Y_{.54}) +1(Y_{.44}+Y_{.22}) - \\
-1(Y_{.24}+Y_{.42}) -2(Y_{.25}+Y_{.41}+Y_{.14}+Y_{.52}) -4(Y_{.15}+Y_{.51})
\end{pmatrix}
$$

A notação adotada é a seguinte: $Y_{...}$ representa a soma dos 25 tratamentos; $Y_{.1.}$ representa a soma de todos os tratamentos, pertencentes ao grupo dos 25 tratamentos do delineamento, que exibem o índice 1 (segundo índice) para fósforo, $Y_{54.}$ a soma dos tratamentos que apresentam o índice 5 para nitrogênio e 4 para o fósforo etc. Assim:

$$Y_{...} = \sum Y_{ijk} = Y_{111} + Y_{222} + \dots + Y_{315} + Y_{421}$$

$$Y_{.1.} = Y_{111} + Y_{213} + Y_{315} + Y_{412} + Y_{514}$$

$$Y_{54.} = Y_{541};\ Y_{.44} = Y_{444};\ Y_{1.5} = Y_{125} \text{ etc.}$$

Deste modo, a expressão de B, por exemplo, é a que segue:

$$B = -2(Y_{111}+Y_{134}+Y_{152}+Y_{125}+Y_{143}) -1(Y_{222}+Y_{245}+Y_{213}+Y_{231}+Y_{254}) +$$
$$+1(Y_{444}+Y_{412}+Y_{435}+Y_{453}+Y_{421}) +2(Y_{555}+Y_{523}+Y_{541}+Y_{514}+Y_{532})$$

As estimativas de $\hat{\beta}_P$, obtidas a partir de $\underline{\hat{\beta}} = S^{-1}\ \Xi'\underline{Y}$, são:

$$\underline{\hat{\beta}} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 40000A & & & & & \\ 20000B & & & & & \\ 20000C & & & & & \\ 20000D & & & & & \\ (14540E & -236F & -236G & +551H & +551I & -1785J) \\ (-236E & +16640F & -26G & +61H & -5494I & +1653J) \\ (-236E & -26F & +16640G & -5494H & +61I & +1653J) \\ (551E & +61F & -5494G & +12820H & -142I & -3858J) \\ (551E & -5494F & +61G & -142H & +12820I & -3858J) \\ (-1785E & +1653F & +1653G & -3858H & -3858I & +12493J) \end{bmatrix}$$

A partir dessas estimativas obtém-se:

$$\hat{Y}_{ijk} = \hat{\beta}_0\xi_0 + \hat{\beta}_{1i}\xi_{1i} + \hat{\beta}_{1j}\xi_{1j} + \hat{\beta}_{1k}\xi_{1k} + \hat{\beta}_{2i}\xi_{2i} + \hat{\beta}_{2j}\xi_{2j} +$$
$$+ \hat{\beta}_{2k}\xi_{2k} + \hat{\beta}_{1i1j}\xi_{1i1j} + \hat{\beta}_{1i1k}\xi_{1i1k} + \hat{\beta}_{1j1k}\xi_{1j1k}$$

No desenvolvimento dos delineamentos experimentais para a metodologia da superfície de resposta, é importante investigar o efeito do delineamento sobre a matriz de dispersão, também chamada "matriz variância-covariância de β". Por definição:

$$\mathrm{Cov}(\underline{\hat{\beta}}) = E\ [\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}]\ [\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}]'$$

$$\text{Mas } \underline{\hat{\beta}} = S^{-1}\Xi'\underline{Y} = S^{-1}\Xi'\ (\Xi\underline{\beta} + \underline{\varepsilon})$$

$$\underline{\hat{\beta}} = S^{-1}S\underline{\beta} + S^{-1}\ \Xi'\underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\hat{\beta}} = \underline{\beta} + S^{-1}\ \Xi'\underline{\varepsilon}$$

$$\text{Logo: } \mathrm{Cov}\ \underline{\hat{\beta}} = E\ [(S^{-1}\ \Xi'\underline{\varepsilon})\ (\underline{\varepsilon}'\Xi S^{-1})]$$

$$= (S^{-1}\Xi' E\ (\underline{\varepsilon}\ \varepsilon')\Xi S^{-1}$$

$$\text{Mas } E\ (\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}') = I\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}\ (\underline{\hat{\beta}}) = S^{-1}\Xi'\Xi S^{-1}\ \sigma^2 I = S^{-1}I\sigma^2 = S^{-1}\sigma^2$$

Então a matriz S^{-1} nos dá as variâncias (elementos da diagonal) e covariâncias (elementos fora da diagonal) das estimativas dos coeficientes da regressão polinomial. Assim:

$$V(\hat{\beta}_0) = 10^{-6}(40000)\,\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}_{1i}) = V(\hat{\beta}_{1j}) = V(\hat{\beta}_{1k}) = 10^{-6}(20000)\,\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}_{2i}) = 10^{-6}(14541)\,\sigma^2;\; V(\hat{\beta}_{2j}) = V(\hat{\beta}_{2k}) = 10^{-6}(16640)\,\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}_{1i1j}) = V(\hat{\beta}_{1i1k}) = 10^{-6}(12820)\,\sigma^2;\; V(\hat{\beta}_{1j1k}) = 10^{-6}(12493)\,\sigma^2$$

$$Cov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{2j}) = Cov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{2k}) = 10^{-6}(236)\,\sigma^2;\; Cov(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{2k}) = 10^{-6}(-26)\,\sigma^2$$

$$Cov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1i1j}) = Cov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1i1k}) = 10^{-6}(551)\,\sigma^2;\; Cov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1j1k}) = 10^{-6}(-1785)\,\sigma^2$$

$$Cov(\hat{\beta}_{1i1j}\hat{\beta}_{1i1k}) = 10^{-6}(-142)\,\sigma^2;\ \text{etc.}$$

3.1 — VARIANCIA DOS $\hat{Y}_{ijk}$

A variância de cada tratamento $\hat{Y}_{ijk}$ é também encontrada a partir da matriz S^{-1} de variâncias e covariâncias.

Seja Ξ'_{ijk} o vetor linha 1xp, cujos elementos correspondem exatamente à linha de Ξ relativa ao tratamento ijk, isto é:

$$\Xi'_{ijk} = [\xi_0\ \xi_{1i}\ \xi_{1j}\ \xi_{1k}\ \xi_{2i}\ \xi_{2j}\ \xi_{2k}\ \xi_{1i1j}\ \xi_{1i1k}\ \xi_{1j1k}\ ]$$

$$V(\hat{Y}_{ijk}) = \Xi'_{ijk}\ Cov(\underline{\hat{\beta}})\,\Xi_{ijk} = \Xi'_{ijk}S^{-1}\ \Xi_{ijk}\,\sigma^2$$

Para o delineamento tipo I, III e IV tem-se:

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{ijk}) = [\,&0{,}040000\ \xi_0^2 + 0{,}020000\,(\xi_{1i}^2 + \xi_{1j}^2 + \xi_{1k}^2) + 0{,}014541\ \xi_{2i}^2 + \\
&+ 0\,016640\,(\xi_{2j}^2 + \xi_{2k}^2) + 0{,}012820\,(\xi_{1i1j}^2 + \xi_{1i1k}^2) + 0{,}012493\,\xi_{1j1k}^2 - \\
&- 0{,}000236\,(2\xi_{2i}\xi_{2j} + 2\xi_{2i}\xi_{2k}) - 0{,}000026\,(2\xi_{2j}\xi_{2k}) + 0{,}000551\,(2\xi_{2i}\xi_{1i1j} + \\
&+ 2\xi_{2i}\xi_{1i1k}) - 0{,}001785\,(2\xi_{2j}\xi_{1j1k}) + 0{,}000061\,(2\xi_{2j}\,\xi_{1i1j} + 2\xi_{2k}\xi_{1i1k}) - \\
&- 0{,}005494\,(2\xi_{2j}\xi_{1i1k} + 2\xi_{2k}\xi_{1i1j}) + 0{,}001653\,(2\xi_{2j}\xi_{1j1k} + 2\xi_{2k}\xi_{1j1k}) - \\
&- 0{,}000142\,(2\xi_{1i1j}\xi_{1i1k}) - 0{,}003858\,(2\xi_{1i1j}\xi_{1j1k} + 2\xi_{1i1k}\xi_{1j1k})\,]\,\sigma^2
\end{aligned}$$

3.2 — ANALISE DA VARIANCIA

A redução na soma de quadrados, devida à adaptação da superfície de resposta com 10 parâmetros, a ser incluída na análise da variância é dada, em forma matricial, por $\underline{\hat{\beta}}' \Xi\ \underline{Y}$. Para o delineamento oriundo da superposição dos três quadrados latinos ortogonais, tipo I, III, IV, a soma de quadrados é dada pela expressão:

$$
\begin{aligned}
\underline{\hat{\beta}}' \equiv{}'\underline{Y} = 10^{-5} \{ & 40000\ A^2 + 20000\ (B^2 + C^2 + D^2) + \\
& + (14540E - 236F - 236G + 551H + 5551I - 1785J\ E + \\
& + (-236E + 16640F - 26G + 61H - 5494I + 1653J)\ F + \\
& + (-236E - 26F + 16640G - 5494H + 61I + 1653J)\ G + \\
& + (551E + 61F - 5494G + 12820H - 142I - 2858J)\ H + \\
& + (551E - 5494F + 61G - 142H + 12820I - 3858J)\ I + \\
& + (-1785E + 1653F + 1653G - 3858H - 3858I + 12493J)\ J \}
\end{aligned}
$$

O quadro da Análise da Variância seria:

F.V.	S.Q.	G.L.	Q.M.	F
Total	$\sum Y^2_{ijk} = T$	25		
Média	$\hat{\beta}_0 A = M$	1	$M/1$	
Nitrogênio linear	$\hat{\beta}_{1i} B = N_L$	1	$N_L/1$	$N_L/1 \div R/15$
Fósforo linear	$\hat{\beta}_{1j} C = P_L$	1	$P_L/1$	$P_L/1 \div R/15$
Potássio linear	$\hat{\beta}_{1k} D = K_L$	1	$K_L/1$	$K_L/1 \div R/15$
Termos quadráticos e interações	$\beta_{2i}E + \ldots + \beta_{1j1k}J = QI$	6	$QI/6$	$QI/6 \div R/15$
Resíduo	$T - M - \ldots - K_L - QI = R$	15	$R/15$	

3.3 — REDUÇÃO GERAL EM X

Para o cálculo dos valores esperados e para a determinação da dosagem mais econômica, ponto de máximo etc., é mais fácil usar a equação geral em X do que a em ξ Substituindo ξ_1, ξ_2 por seus valores, chega-se à equação de produção, em **X**:

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_{ijk} = & [(\hat{\beta}_0 - 3(\hat{\beta}_{1i} + \hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{1k}) + 7(\hat{\beta}_{2i} + \hat{\beta}_{2j} + \hat{\beta}_{2k}) + \\
& +9(\hat{\beta}_{1i1j} + \hat{\beta}_{1i1k} + \hat{\beta}_{1j1k})] + (\hat{\beta}_{1i} - 6\,\hat{\beta}_{2i} - 3\,\hat{\beta}_{1i1j} - \\
& -3\,\hat{\beta}_{1i1k})\,X_i + (\hat{\beta}_{1j} - 6\hat{\beta}_{2j} - 3\,\hat{\beta}_{1i1j} - 3\,\hat{\beta}_{1j1k})\,X_j + \\
& + (\hat{\beta}_{1k} - 6\,\hat{\beta}_{2k} - 3\,\hat{\beta}_{1i1k} - 3\,\hat{\beta}_{1j1k})\,X_k + \hat{\beta}_{2i}X_i^2 + \\
& + \hat{\beta}_{2j}X_j^2 + \hat{\beta}_{2k}X_k^2 + \hat{\beta}_{1i1j}X_iX_j + \hat{\beta}_{1i1k}X_iX_k + \hat{\beta}_{1j1k}X_jX_k
\end{aligned}
$$

3.4 — REDUÇÃO NO NÚMERO DE PARÂMETROS

Tem-se verificado, em grande quantidade de ensaios de adubação efetuados no Instituto Agronômico e em outras instituições, que as interações do tipo N_LP_L, N_LK_L, P_LK_L são de menor importância, em relação aos componentes N_L, P_L, N_Q, P_Q etc.

É possível, em muitos casos, estudar o modelo eliminando essas interações. Neste caso,

$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} = & \beta_0\xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{1k}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \\
& + \beta_{2k}\xi_{2k} + \varepsilon_{ijk} \qquad \text{(B)}
\end{aligned}
$$

Se chamarmos S_I à matriz $\Xi' \Xi$ obtida a partir do modelo sem interações, obteremos uma matriz diagonal, o que mostra que os componentes passam a ser estimados independentemente.

$$S_I = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

$$S_I^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}040000 & & & & & & \\ & 0{,}020000 & & & & & \\ & & 0{,}020000 & & & & \\ & & & 0{,}020000 & & & \\ & & & & 0{,}014286 & & \\ & & & & & 0{,}014286 & \\ & & & & & & 0{,}014286 \end{bmatrix}$$

Em muitos solos do Estado de São Paulo não há resposta ao potássio e às suas interações.

Se usarmos o modelo:

$$Y_{ijk} = \beta_0\xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{1i1j}\xi_{1i1j} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{(C)}$$

A matriz correspondente à supressão do 3.º fator e suas interações, e sua inversa, são as transcritas a seguir:

$$S_{II} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}040000 & & & & & \\ & 0{,}020000 & & & & \\ & & 0{,}020000 & & & \\ & & & 0{,}014286 & & \\ & & & & 0{,}014286 & \\ & & & & & 0{,}010000 \end{bmatrix}$$

Também, neste caso, o delineamento possibilita a estimativa dos parâmetros, independentemente.

3.5 — VIÉS NAS ESTIMATIVAS EM DECORRÊNCIA DO USO INCOMPLETO DO MODELO

Como foi dito anteriormente, em muitos casos a existência de interações pode ser questionada, usando-se então o modelo simplificado, com sete parâmetros, dado pela equação (B).

É de interesse, entretanto, avaliar o viés ("bias") que poderia ocorrer na estimativa dos efeitos lineares e quadráticos em decorrência do uso do modelo simplificado, quando as interações lineares dos fatores, dois a dois, possam realmente existir. Para essa avaliação deve-se considerar:

Hipótese H_o: $\underline{Y} = \Xi_1 \underline{\beta}_1 + \underline{\varepsilon}$ (modelo reduzido com 7 parâmetros)

Hipótese H_a: $\underline{Y} = \Xi_1 \underline{\beta}_1 + \Xi_2 \underline{\beta}_2 + \underline{\varepsilon}$ (modelo com 10 parâmetros)

onde as matrizes Ξ_1, Ξ_2, $\underline{\beta}_1$ e $\underline{\beta}_2$ têm respectivamente as dimensões (Nx7), (Nx3), (7x1) e (3x1).

De acordo com o modelo reduzido, (hipótese H_o),

$$\hat{\underline{\beta}}_1 = (\Xi_1' \Xi_1)^{-1} \Xi_1 \underline{Y} = S_1^{-1} \Xi_1' \underline{Y}$$

A esperança de $\underline{\beta}_1$, na hipótese de ser H_a verdadeira, é dada por:

$$E(\hat{\underline{\beta}}_1) = E\left[S_1^{-1} \Xi_1' (\Xi_1 \underline{\beta}_1 + \Xi_2 \underline{\beta}_2 + \underline{\varepsilon})\right]$$

$$\varepsilon(\hat{\underline{\beta}}_1) = \underline{\beta}_1 + S^{-1} \Xi_1' \Xi_2 \underline{\beta}_2 = \underline{\beta}_1 + M \underline{\beta}_2$$

A grandeza do viés é determinada pela matriz M (matriz dos "aliases")

$$\Xi_1' \Xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = S^{-1} \Xi_1' \Xi_2 = \begin{bmatrix} 1/25 & & & & & & \\ & 1/50 & & & & & \\ & & 1/50 & & & & \\ & & & 1/50 & & & \\ & & & & 1/70 & & \\ & & & & & 1/70 & \\ & & & & & & 1/70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 3/7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M\underline{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/7\ \beta_{1j1k} \\ 3/7\ \beta_{1i1k} \\ 3/7\ \beta_{1i1j} \end{bmatrix} ; \; E\hat{\underline{\beta}}_1 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1i} \\ \beta_{1j} \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2i} \\ \beta_{2j} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/7\ \beta_{1j1k} \\ 3/7\ \beta_{1i1k} \\ 3/7\ \beta_{1i1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_{1i} \\ \beta_{1j} \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2i} + 1/7\ \beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + 3/7\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{2k} + 3/7\ \beta_{1i1j} \end{bmatrix}$$

A soma de quadrados do resíduo, quando o modelo reduzido de q parâmetros (no caso, q=7) não é o mais adequado para representar o fenômeno estudado, também apresenta um viés.

Desenvolvendo a expressão $E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}_1 \Xi'_1 \Xi_1 \hat{\underline{\beta}}_1)$ teremos:

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \Xi'_1 \Xi_1 \hat{\underline{\beta}}_1) = (N-q)\sigma^2 + \underline{\beta}'_2(\Xi'_2\Xi_2 - \Xi'_2\Xi_1 M)\underline{\beta}_2$$

ou, segundo a fórmula usada em Box e Hunter (5),

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \Xi'_1 \Xi_1 \hat{\underline{\beta}}_1) = (N-q)\sigma^2 \quad \underline{\beta}'_2(\Xi_2 - \Xi_1 M)'(\Xi_2 - \Xi_1 M)\underline{\beta}_2$$

No caso presente do delineamento tipo I, III, IV, com o modelo simplificado com 7 parâmetros,

$$\underline{\beta}'_2(\Xi'_2\Xi_2 - \Xi'_2\Xi_1 M)\underline{\beta}_2 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \beta_{1i1k} \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 610 & 70 & 210 \\ 70 & 610 & 210 \\ 210 & 210 & 690 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

Assim:

$$E(\text{SQ Resíduo}) = 18\sigma^2 + \frac{1}{7}\,[\,610\,\beta^2_{1i1j} + 610\,\beta^2_{1i1k} + 690\,\beta^2_{1j1k} + $$
$$+ 140\,\beta_{1i1j}\beta_{1i1k} + 420\,\beta_{1i1j}\beta_{1j1k} + 420\,\beta_{1i1k}\beta_{1j1k}\,]$$

Se o modelo for dado pela equação (C), com 6 parâmetros, teremos.

$$E(\hat{\underline{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1i} \\ \beta_{1j} \\ \beta_{2i} + 1/7\beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + 3/7\beta_{1i1k} \\ \beta_{1i1j} + 3/10\beta_{2k} + 1/10\beta_{1i1k} + 3/10\beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}_1 \Xi'_1 \; {}_1\hat{\underline{\beta}}_1) = 19\sigma^2 + \begin{bmatrix} \beta_{1k}\beta_{2k}\beta_{1i1k}\beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & \frac{603}{7} & 27 \\ 0 & -9 & 27 & \frac{627}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \Xi'_1 \Xi_1 \hat{\underline{\beta}}_1) = 19\sigma^2 + 50\beta^2_{1k} + 61\beta^2_{2k} + 603/7\,\beta^2_{1i1k} + 627/7\,\beta^2_{1j1k}$$
$$-6\beta_{2k}\beta_{1i1k} - 18\beta_{2k}\beta_{1j1k} + 54\beta_{1i1k}\beta_{1j1k},$$

3.6 — ANÁLISE DO DELINEAMENTO (1/5 (5³)) Tipo I, II, III

A relação dos 25 tratamentos já foi apresentada.

O vetor $\underline{Y}'$ das observações deve ser escrito na seguinte ordem:

$$\underline{Y}' = [\,Y_{111}\,Y_{222}\,Y_{333}\,Y_{444}\,Y_{555}\,Y_{234}\,Y_{345}\,Y_{451}\,Y_{512}\,Y_{123}\,Y_{352}\,Y_{413}\,Y_{524}\,Y_{135}\,Y_{241}\,Y_{425}\,Y_{531}\,Y_{142}\,Y_{253}\,Y_{314}\,Y_{543}\,Y_{154}\,Y_{215}\,Y_{321}\,Y_{432}\,]$$

A matriz S referente ao produto $\Xi'\Xi$ é a que segue:

$$S = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 100 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 30 & 100 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 10 & 30 & 100 \end{bmatrix}$$

A matriz S^{-1} é dada a seguir:

$$S^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 40000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16640 & -236 & -26 & 61 & 1653 & -5494 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & 14540 & -236 & 551 & -1785 & 551 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -26 & -236 & 16640 & -5494 & 1653 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 551 & -5494 & 12820 & -3858 & -142 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1653 & -1785 & 1653 & -3858 & 12493 & -3858 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5494 & 551 & 61 & -142 & -3858 & 12820 \end{bmatrix}$$

As quantidades $A = \sum Y_{ijk} = Y_{\cdot\cdot\cdot}$,

$B = 2(Y_{1\cdot\cdot}) - 1(Y_{2\cdot\cdot}) + 1(Y_{4\cdot\cdot}) + 2(Y_{5\cdot\cdot})$, C, D, E, F, G, H, I, J são definidas da mesma forma que anteriormente, só que, agora, os valores das observações que fazem parte dessas quantidades são retirados do novo conjunto de 25 tratamentos, atrás descrito.

Por exemplo:

$$B = -2(Y_{111} + Y_{123} + Y_{135} + Y_{142} + Y_{154}) - 1(Y_{222} + Y_{234} + Y_{241} + Y_{253} + Y_{215}) +$$
$$+1(Y_{444} + Y_{451} + Y_{413} + Y_{425} + Y_{432}) + 2(Y_{555} + Y_{512} + Y_{524} + Y_{531} + Y_{534})$$

Temos então que:

$\hat{\beta}_0 = 0{,}040000A$, $\hat{\beta}_{1i} = 0{,}020000B$,

$\hat{\beta}_{2i} = (0{,}016640E - 0{,}000236F - 0{,}000026G + 0{,}000061H + 0{,}001653I - 0{,}005494J)$;
$\hat{\beta}_{2j}$ e $\hat{\beta}_{2k}$ são definidos semelhantemente.

$\hat{\beta}_{1i1j} = (0{,}000061E + 0{,}000551F - \ldots \quad - 0{,}000142J)$, sendo $\hat{\beta}_{1i1k}$ e $\hat{\beta}_{1j1k}$ definidos semelhantemente.

A análise da variância é feita de forma semelhante, e a matriz de dispersão é dada, analogamente ao caso anterior, por $S^{-1}\sigma^2$.

3.7 — REDUÇÃO DO NÚMERO DE PARÂMETROS E AVALIAÇÃO DO VIÉS

O viés, obtido do uso de modelo com sete parâmetros se na realidade o verdadeiro modelo fosse de 10 parâmetros (incluindo as interações simples), é dado pela matriz M.

$$M\underline{\hat{\beta}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 1/7 & 0 \\ 3/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \quad ; \quad E(\underline{\hat{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_k \\ B_{2i} + 3/7\ \beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + 1/7\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{2k} + 3/7\ \beta_{1i1j} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'_1 \Xi'_1 \Xi_1 \underline{\hat{\beta}}_1) = 18\sigma^2 + \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \beta_{1i1k} \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 610 & 210 & 70 \\ 210 & 690 & 210 \\ 70 & 210 & 610 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

Quando se utiliza o modelo com seis parâmetros,

$$M\underline{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \quad ; \quad E(\underline{\hat{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1i} \\ \beta_{1j} \\ \beta_{2i} + \frac{3}{7}\beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + \frac{1}{7}\beta_{1i1k} \\ \beta_{1i1j} + \frac{3}{10}\beta_{2k} + \frac{3}{10}\beta_{1i1k} + \frac{1}{10}\beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'_1 \Xi'_1 \Xi_1 \underline{\hat{\beta}}_1) = 19\sigma^2 + \begin{bmatrix} \beta_{1k}\beta_{2k}\beta_{1i1k}\beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & -9 & -3 \\ 0 & -9 & \frac{627}{7} & 27 \\ 0 & -3 & 27 & \frac{603}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

3.8 — *ANÁLISE DO DELINEAMENTO (1/5) (5^3)*

Tipo I, II, IV

O vetor $\underline{Y}$ *da produção é composto dos seguintes tratamentos, pela ordem:* 111, 222, 333, 444, 555, 235, 341, 452, 513, 124, 354, 415, 521, 132, 243, 423, 534, 145, 251, 312, 542, 153, 214, 325 e 431. As matrizes S e S^{-1} são, respectivamente:

$$S = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 100 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 30 & 100 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 30 & 10 & 100 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 40000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16640 & -26 & -236 & 1653 & 61 & -5494 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -26 & 16640 & -236 & 1653 & -5494 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -236 & 14540 & -1785 & 551 & 551 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1653 & 1653 & -1785 & 12493 & -3858 & -3858 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & -5494 & 551 & -3858 & 12820 & -142 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5494 & 61 & 551 & -3858 & -142 & 12820 \end{bmatrix}$$

As quantidades A, B, C, ..., J são definidas de forma semelhante, porém os tratamentos terão que pertencer ao grupo dos 25 tratamentos deste tipo de delineamento. Por exemplo:

$$B = -2(Y_{111}+Y_{124}+Y_{132}+Y_{145}+Y_{153}) -1(Y_{222}+Y_{235}+Y_{243}+Y_{251}+Y_{214}) + $$
$$+1(Y_{444}+Y_{452}+Y_{415}+Y_{423}+Y_{431}) +2(Y_{555}+Y_{513}+Y_{521}+Y_{534}+Y_{542})$$

O vetor $\hat{\beta}$, suas variâncias e covariâncias, a análise da variância são encontrados de modo semelhante aos antes mencionados.

3.9 — REDUÇÃO DO NÚMERO DE PARÂMETROS E AVALIAÇÃO DO VIÉS

A grandeza do viés obtido pelo uso do modelo B, com sete parâmetros, quando na realidade o verdadeiro modelo deveria ser o de 10 parâmetros, dada pela matriz M, vem a seguir:

$$\mathrm{M}\underline{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \quad ; \ \mathrm{E}(\hat{\underline{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_k \\ \beta_{2i} + 3/7\, \beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + 3/7\, \beta_{1i1k} \\ \beta_{2k} + 1/7\, \beta_{1i1j} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}\,(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \underline{X}'_1 \underline{X}_1 \hat{\underline{\beta}}_1) = 18\,\sigma^2 + \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j}\beta_{1i1k}\beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 690 & 210 & 210 \\ 210 & 610 & 70 \\ 210 & 70 & 610 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

Se for usado o modelo com seis parâmetros,

$$\mathrm{M}\underline{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \quad ; \ \mathrm{E}(\hat{\underline{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1i} \\ \beta_{1j} \\ \beta_{2i} + \frac{3}{7}\beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + \frac{3}{7}\beta_{1i1k} \\ \beta_{1i1j} + \frac{1}{10}\beta_{2k} + \frac{3}{10}\beta_{1i1k} + \frac{3}{10}\beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \underline{X}'_1 \underline{X}_1 \hat{\underline{\beta}}_1) = 19\,\sigma^2 + \begin{bmatrix} \beta_{1k}\beta_{2k}\beta_{1i1k}\beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & \beta_{1k} \\ 0 & 69 & -3 & -3 & \beta_{2k} \\ 0 & -3 & \frac{547}{7} & 1 & \beta_{1i1k} \\ 0 & -3 & 1 & \frac{547}{7} & \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

4 — MODELO COM RAIZ QUADRADA

Começaremos com o estudo do Tipo I, III, IV.

Como para o modelo anterior, os índices i, j, k indicam os fatores, cada um deles variando de 1 a 5, ξ_1 e ξ_2 representam os componentes linear e quadrático.

$\xi_1 = \alpha_1 + Z$; $\xi_2 = \alpha_2 + \gamma_2 Z + Z^2$, onde $Z = \sqrt{X}$.

Logo, $\xi_1 = \alpha_1 + \sqrt{X}$ e $\xi_2 = \alpha_2 + \gamma_2 \sqrt{X} + X$.

Impondo as condições de ortogonalidade, obtêm-se as expressões:

$\xi_1 = -1{,}67646 + \sqrt{X}$ e $\xi_2 = 2{,}41157 - 3{,}22798\sqrt{X} + X$

com *os seguintes coeficientes:*

ξ_{11}	=	−0,67646	ξ_{21}	=	0,18359
ξ_{12}	=	−0,2€226	ξ_{22}	=	−0,15342
ξ_{13}	—	0,05554	ξ_{23}	=	−0,17928
ξ_{14}	=	0,32354	ξ_{24}	=	−0,04438
ξ_{15}	=	0,55964	ξ_{25}	=	0,19349

que são análogos para cada um dos três fatores.

Também no modelo com raiz quadrada os valores $\hat{\beta}_p$ são encontrados pelo desenvolvimento matricial visto anteriormente, chegando-se a $\underline{\hat{\beta}} = S^{-1}\, \Xi' \underline{Y}$.

A matriz Ξ para o novo modelo é a que segue na página 43.

A equação polinomial expressa em termos dos ξ é a seguinte:

$$Y_{ijk} = \beta_0\xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{1k}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{2k}\xi_{2k} + $$
$$+ \beta_{1i1j}\xi_{1i1j} + \beta_{1i1k}\xi_{1i1k} + \beta_{1j1k}\xi_{1j1k} + \varepsilon_{ijk} \qquad (D)$$

Ξ =

Tratamento	ξ_0	ξ_{1i}	ξ_{1j}	ξ_{1k}	ξ_{2i}	ξ_{2j}	ξ_{2k}	ξ_{1i1j}	ξ_{1i1k}	ξ_{1j1k}
111	1	−0,67646	−0,67646	−0,67646	0,18359	0,18359	0,18359	0,45759	0,45759	0,45759
222	1	−0,26226	−0,26226	−0,26226	−0,15342	−0,15342	−0,15342	0,06878	0,06878	0,06878
333	1	0,05554	0,05554	0,05554	−0,17928	−0,17928	−0,17928	0,00308	0,00308	0,00308
444	1	0,32354	0,32354	0,32354	−0,04438	−0,04438	−0,04438	0,10467	0,10467	0,10467
555	1	0,55964	0,55964	0,55964	0,19349	0,19349	0,19349	0,31319	0,31319	0,31319
245	1	−0,26226	0,32354	0,55964	−0,15342	−0,04438	0,19349	−0,08485	−0,14677	0,18106
351	1	0,05554	0,55964	−0,67646	−0,17928	0,19349	0,18359	0,03108	−0,03757	−0,37857
412	1	0,32354	−0,67646	−0,26226	−0,04438	0,18359	−0,15342	−0,21886	−0,08485	0,17740
523	1	0,55964	−0,26226	0,05554	0,19349	−0,15342	−0,04438	−0,03757	−0,21886	0,01796
134	1	−0,67646	0,05554	0,32354	0,18359	−0,17928	−0,17928	−0,14677	0,03108	−0,01456
324	1	0,05554	−0,26226	0,32354	−0,17928	−0,15342	−0,04438	−0,01456	+0,01796	−0,08485
435	1	0,32354	0,05554	0,55964	−0,04438	−0,17928	0,19349	0,01796	0,18106	0,03108
541	1	0,55964	0,32354	−0,67646	0,19349	−0,04438	0,18359	0,18106	−0,37857	−0,21886
152	1	−0,67646	0,55964	−0,26226	0,18359	0,19349	−0,15342	−0,37857	0,17740	−0,14677
213	1	−0,26226	−0,67646	0,05554	−0,15342	0,18359	−0,17928	0,17740	−0,01456	−0,03757
453	1	0,32354	0,55964	0,05554	−0,04438	0,19349	−0,17928	0,18106	0,01796	0,03108
514	1	0,55964	−0,67646	0,32354	0,19349	0,18359	−0,04438	−0,37857	0,18106	−0,21886
125	1	−0,67646	−0,26226	0,55964	0,18359	−0,15342	0,19349	0,17740	−0,37857	−0,14677
231	1	−0,26226	0,05554	−0,67646	−0,15342	−0,17928	0,18359	−0,01456	0,17740	−0,03757
342	1	0,05554	0,32354	−0,26226	−0,17928	−0,04438	−0,15342	0,01796	−0,01456	−0,08485
532	1	0,55964	0,05554	−0,26226	0,19349	−0,17928	−0,15342	0,03108	−0,14677	−0,01456
143	1	−0,67646	0,32354	0,05554	0,18359	−0,04438	−0,17928	−0,21886	−0,03757	0,01796
254	1	−0,26226	0,55964	0,32354	−0,15342	0,19349	−0,04438	−0,14677	−0,08485	0,18106
315	1	0,05554	−0,67646	0,55964	−0,17928	0,18359	0,19349	−0,03757	0,03108	−0,37857
421	1	0,32354	−0,26226	−0,67646	−0,04438	−0,15342	0,18359	−0,08485	−0,21886	0,17740

A matriz $S = X'X$ é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}73655 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}19711 \\ 0 & 0 & 4{,}73655 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}19711 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}73655 & 0 & 0 & 0 & -0{,}19711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}64380 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}09491 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}64380 & 0 & 0 & 0{,}27470 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}64380 & 0{,}27470 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}19711 & 0 & 0 & 0{,}27470 & 0{,}89730 & 0{,}11962 & 0{,}29940 \\ 0 & 0 & -0{,}19711 & 0 & 0 & 0{,}27470 & 0 & 0{,}11962 & 0{,}89730 & 0{,}29940 \\ 0 & -0{,}19711 & 0 & 0 & 0{,}09491 & 0 & 0 & 0{,}29940 & 0{,}29940 & 0{,}89730 \end{bmatrix}$$

A recíproca S^{-1} de S vem a seguir:

$$S^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 40000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 213693 & -862 & -862 & -9102 & 8847 & 8847 & -20735 & -20735 & 61742 \\ 0 & -862 & 213713 & -66 & 3056 & -26541 & 681 & -1597 & 62203 & -20735 \\ 0 & -862 & -66 & 213713 & 3056 & 681 & -26541 & -62203 & -1597 & -20735 \\ 0 & -9102 & 3057 & 3057 & 1585522 & -31342 & -31342 & 73455 & 73455 & -218724 \\ 0 & 8847 & -26541 & 681 & -31342 & 1825411 & -6986 & 16373 & -637784 & 212604 \\ 0 & 8847 & 681 & -26541 & -31342 & -6986 & 1825411 & -637784 & 16373 & 212604 \\ 0 & -20735 & -1597 & 62203 & 73455 & 16373 & -637784 & 1494742 & -38373 & -498268 \\ 0 & -20735 & 62203 & -1597 & 73455 & -637784 & 16373 & -38373 & 1494742 & -498268 \\ 0 & 61742 & -20735 & -20735 & -218724 & 212604 & 212604 & -498268 & -498286 & 1483665 \end{bmatrix}$$

O vetor das produções é $\underline{Y}$, constituído dos 25 tratamentos de cada um dos três grupos considerados anteriormente (no caso, o Tipo I, III, IV).

Os dez elementos do vetor $\Xi'\underline{Y}$ são designados por A, B, C, ..., J, dados pelas expressões:

$$A = \sum Y_{ijk} = Y_{...}$$

$$\begin{aligned} B = & -067646\ (Y_{111} + Y_{134} + Y_{152} + Y_{125} + Y_{143}) - 0{,}26226\ (Y_{222} + Y_{245} + \\ & + Y_{213} + Y_{231} + Y_{254}) + 0{,}05554\ (Y_{333} + Y_{351} + Y_{324} + Y_{342} + Y_{315}) + \\ & + 0{,}32354\ (Y_{444} + Y_{412} + Y_{435} + Y_{453} + Y_{421}) + 0{,}55964\ (Y_{555} + \\ & + Y_{523} + Y_{541} + Y_{514} + Y_{532}) \\ = & -0{,}67646\ (Y_{1..}) - 0{,}26226\ (Y_{2..}) + 0{,}05554\ (Y_{3..}) + \\ & + 0{,}32354\ (Y_{4..}) + 0{,}55964\ (Y_{5..}) \end{aligned}$$

C e D são desenvolvidos de forma semelhante a B.

$$\begin{aligned} E = & \ 0{,}18359\ (Y_{111} + Y_{134} + Y_{152} + Y_{125} + Y_{143}) - 0{,}15342\ (Y_{222} + Y_{245} + \\ & + Y_{213} + Y_{231} + Y_{254}) - 0{,}17928\ (Y_{333} + Y_{351} + Y_{324} + Y_{342} + Y_{315}) - \\ & - 0{,}04438\ (Y_{444} + Y_{412} + Y_{435} + Y_{453} + Y_{421}) + 0{,}19349\ (Y_{555} + Y_{523} + \\ & + Y_{541} + Y_{514} + Y_{532}) \\ = & \ 0{,}18359\ (Y_{1..}) - 0{,}15342\ (Y_{2..}) - 0{,}17928\ (Y_{3..}) - \\ & - 0{,}04438\ (Y_{4..}) + 0{,}19349\ (Y_{5..}) \end{aligned}$$

F e G são desenvolvidos de forma semelhante a E.

$$\begin{aligned} H = & \ 0{,}45759\ Y_{111} + 0{,}06878\ Y_{222} + 0{,}00308\ Y_{333} + 0{,}10467\ Y_{444} + \\ & + 0{,}31319\ Y_{555} - 0{,}08485\ (Y_{245} + Y_{421}) + 0{,}03108\ (Y_{351} + Y_{532}) - \\ & - 0{,}21886\ (Y_{412} + Y_{143}) - 0{,}14677\ (Y_{523} + Y_{254}) - \\ & - 0{,}03757\ (Y_{134} + Y_{315}) - 0{,}01456\ (Y_{324} + Y_{231}) + \\ & + 0{,}01796\ (Y_{435} + Y_{342}) + 0{,}18106\ (Y_{541} + Y_{453}) - \\ & - 0{,}37857\ (Y_{152} + Y_{514}) + 0{,}17740\ (Y_{213} + Y_{125}) \end{aligned}$$

H = BC, respeitadas as notações condensadas, como foi feito para o caso do modelo quadrático.

I e J são desenvolvidos de forma semelhante a H.

Temos já todos os elementos para avaliação do vetor $\hat{\underline{\beta}} = S^{-1} \Xi'\underline{Y}$.

Observando a matriz S^{-1}, vê-se que, com exceção da 1.ª linha e da 1.ª coluna, que só têm o elemento da diagonal, as outras linhas e colunas têm todos os seus elementos, o que mostra que, excetuando $\hat{\beta}_0$, todos os demais $\hat{\beta}_p$ estão correlacionados.

As variâncias e covariâncias de alguns dos $\hat{\beta}_p$ são dadas a seguir, e podem ser encontradas a partir da matriz $S^{-1}\sigma^2$.

$$V(\hat{\beta}_0) = 10^{-6}(40000)\,\sigma^2$$
$$V(\hat{\beta}_{1i}) = 10^{-6}(213693)\,\sigma^2;\; V(\hat{\beta}_{1j}) = V(\hat{\beta}_{1k}) = 10^{-6}(213713)\,\sigma^2$$
$$V(\hat{\beta}_{2i}) = 10^{-6}(1585522)\,\sigma^2;\; V(\hat{\beta}_{2j}) = V(\hat{\beta}_{2k}) = 10^{-6}(1825411)\,\sigma^2$$
$$V(\hat{\beta}_{1i1j}) = V(\hat{\beta}_{1i1k}) = 10^{-6}(1494742)\,\sigma^2; V(\hat{\beta}_{1j1k}) = 10^{-6}(1483665)\,\sigma^2$$
$$Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1j}) = Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1k}) = 10^{-6}(-862)\,\sigma^2;\; Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{2i}) = 10^{-6}(-9102)\,\sigma^2$$
$$Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{2j}) = Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{2k}) = 10^{-6}(8847)\,\sigma^2$$
$$Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1i1j}) = Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1i1k}) = 10^{-6}(-20735)\,\sigma^2$$
$$Cov(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1j1k}) = 10^{-6}(61742)\,\sigma^2$$
$$Cov(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{1k}) = 10^{-6}(-66)\,\sigma^2;\; Cov(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{2i}) = 10^{-6}\;(3056)\,\sigma^2, \text{ etc.}$$

4.1 — VARIANCIA DE $\hat{Y}_{ijk}$

A variância de cada tratamento $\hat{Y}_{ijk}$ é dada por:

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{ijk}) = [\; & 0{,}04\,\xi_0^2 + 0{,}213694\,\xi_{1i}^2 + 0{,}213713\,(\xi_{1j}^2 + \xi_{1k}^2) + \\ & + 1{,}585522\,\xi_{2i}^2 + 1{,}825411\,(\xi_{2j}^2 + \xi_{2k}^2) + \\ & + 1{,}494742\,(\xi_{1i1j}^2 + \xi_{1i1k}^2) + 1{,}483665\,\xi_{1j1k}^2 - \\ & - 0{,}000863\,(2\,\xi_{1i}\xi_{1j} + 2\,\xi_{1i}\xi_{1k}) - 0{,}009102\,(2\,\xi_{1i}\xi_{2i}) + \\ & + 0{,}008847\,(2\,\xi_{1i}\xi_{1j} + 2\,\xi_{1i}\xi_{2k}) - \\ & - 0{,}020735\,(2\,\xi_{1i}\xi_{1i1j} + 2\,\xi_{1i}\xi_{1i1k} + 2\,\xi_{1j}\xi_{1j1k} + 2\,\xi_{1k}\xi_{1j1k}) + \\ & + 0{,}061742\,(2\,\xi_{1i}\xi_{1j1k}) - 0{,}000066\,(2\,\xi_{1j}\xi_{1k}) + \\ & + 0{,}003057\,(2\,\xi_{1j}\xi_{2i}) - 0{,}026541\,(2\,\xi_{1j}\xi_{2j} + 2\,\xi_{1k}\xi_{2k}) + \\ & + 0{,}000681\,(2\,\xi_{1j}\xi_{2k}) - 0{,}001597\,(2\,\xi_{1j}\xi_{1i1j} + 2\,\xi_{1k}\xi_{1i1k}) + \\ & + 0{,}062203\,(2\,\xi_{1j}\xi_{1i1k} + 2\,\xi_{1k}\xi_{1i1j}) + 0{,}003057\,(2\,\xi_{1k}\xi_{2i}) + \end{aligned}$$

$$+ 0{,}000681 \, (2\, \xi_{1k}\xi_{2j}) - 0{,}031342 \, (2\, \xi_{2i}\xi_{2j} + 2\, \xi_{2i}\xi_{2k}) +$$
$$+ 0{,}073455 \, (2\, \xi_{2i}\xi_{1i1j} + 2\, \xi_{2i}\xi_{1i1k}) - 0{,}218724 \, (2\, \xi_{2i}\xi_{1j1k}) -$$
$$- 0{,}006986 \, (2\, \xi_{2j}\xi_{2k}) + 0{,}016373 \, (2\, \xi_{2j}\xi_{1i1j} + 2\, \xi_{2k}\xi_{1i1k}) -$$
$$- 0{,}637784 \, (2\, \xi_{2j}\xi_{1i1k} + 2\, \xi_{2k}\xi_{1i1j}) +$$
$$+ 0{,}212604 \, (2\, \xi_{2j}\xi_{1j1k} + 2\, \xi_{2k}\xi_{1j1k}) -$$
$$- 0{,}038373 \, (2\, \xi_{1i1j}\xi_{1i1k}) - 0{,}498268 \, (2\, \xi_{1i1j}\xi_{1j1k} +$$
$$+ 2\, \xi_{1i1k}\xi_{1j1k}) \,] \, \sigma^2$$

4.2 — ANALISE DA VARIANCIA

Em conseqüência da existência de correlação entre quase todos os $\hat{\beta}_p$, somente o componente correspondente à média pode ser isolado na redução da soma de quadrados. Todos os outros nove componentes serão testados englobadamente.

F.V.		GL	Q.M.	F
Total	$\sum Y^2 = T$	25		
Média	$\hat{\beta}_0 A = M$	1	M/1	
Regressão	$\hat{\beta}_{1i}B + \hat{\beta}_{1j}C + \ldots + \hat{\beta}_{1j1k}J = LQI$	9	LQI/9	LQI/9 ÷ R/15
Resíduo	$T - M - LQI = R$	15	R/15	

4.3 — EQUAÇÃO GERAL EM X

$$Y_{ijk} = [\, (\beta_0 - 1{,}67646 \, (\beta_{1i} + \beta_{1j} + \beta_{1k}) + 2{,}41157 \, (\beta_{2i} + \beta_{2j} + \beta_{2k}) +$$
$$+ 2{,}81051 \, (\beta_{1i1j} + \beta_{1i1k} + \beta_{1j1k}) \,] +$$
$$+ [\, (\beta_{1i} - 3{,}22798\, \beta_{2i} - 1{,}67646 \, (\beta_{1i1j} + \beta_{1i1k}) \,] \sqrt{X_i} +$$
$$+ [\, \beta_{1j} - 3{,}22798\, \beta_{2j} - 1{,}67646 \, (\beta_{1i1j} + \beta_{1j1k}) \,] \sqrt{X_j} +$$
$$+ [\, \beta_{1k} - 3{,}22798\, \beta_{2k} - 1{,}67646 \, (\beta_{1i1k} + \beta_{1j1k}) \,] \sqrt{X_k} +$$
$$+ \beta_{2i}X_i + \beta_{2j}X_j + X_{2k}X_k + \beta_{1i1j} \sqrt{X_iX_j} + \beta_{1i1k} \sqrt{X_iX_k} +$$
$$+ \beta_{1j1k} \sqrt{X_jX_k}$$

4.4 — REDUÇÃO NO NÚMERO DE PARAMETROS

Caso se possa admitir que as interações de dois fatores não sejam relevantes, considera-se um modelo polinomial em sete parâmetros, em que entram só os efeitos principais (correspondentes aos efeitos lineares e quadráticos na variável $Z = \sqrt{X}$). O modelo se reduz a:

$$Y_{ijk} = \beta_0\xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{1k}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{2k}\xi_{2k} + \varepsilon_{ijk} \quad (E)$$

As matrizes S_I e S, foram determinadas e são dadas a seguir:

$$S_I = \begin{bmatrix} 25 & & & & & & \\ & 4{,}73655 & & & & & \\ & & 4{,}73655 & & & & \\ & & & 4{,}73655 & & & \\ & & & & 0{,}64380 & & \\ & & & & & 0{,}64380 & \\ & & & & & & 0{,}64380 \end{bmatrix} ; \quad S_I^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 40000 & & & & & & \\ & 211124 & & & & & \\ & & 211124 & & & & \\ & & & 211124 & & & \\ & & & & 1553277 & & \\ & & & & & 1553277 & \\ & & & & & & 1553277 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que, nos casos em que se puder admitir a inexistência de interações, as matrizes S_I e S_I^{-1} transformam-se em matrizes diagonais, significando que os efeitos se tornam independentes também para o modelo com raiz quadrada.

Se no modelo pudermos suprimir o terceiro fator e suas interações, isto é, se tivermos:

$$Y_{ijk} = \beta_0\xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{1i1j}\xi_{1i1j} + \varepsilon_{ijk} \quad (F),$$

as matrizes S_{II} e S_{II}^{-1} são as que seguem:

$$S_{II} = \begin{bmatrix} 25 & & & & & \\ & 4{,}73655 & & & & \\ & & 4{,}73655 & & & \\ & & & 0{,}64380 & & \\ & & & & 0{,}64380 & \\ & & & & & 0{,}89730 \end{bmatrix} ; \quad S_{II}^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 40000 & & & & & \\ & 211124 & & & & \\ & & 211124 & & & \\ & & & 1553277 & & \\ & & & & 1553277 & \\ & & & & & 1114454 \end{bmatrix}$$

4.5 — VIÉS NAS ESTIMATIVAS EM DECORRÊNCIA DO USO INCOMPLETO DO MODELO

O viés que poderia ocorrer na estimativa dos efeitos lineares e quadráticos, e também na soma de quadrados do resíduo, em decorrência do uso do modelo simplificado, quando as interações lineares dos fatores dois a dois possam realmente existir, é mostrado por:

$$E(\hat{\underline{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1i} - 0{,}041615\ \beta_{1j1k} \\ \beta_{1j} - 0{,}041615\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1k} - 0{,}041615\ \beta_{1i1j} \\ \beta_{2i} + 0{,}14742\ \beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + 0{,}42668\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{2k} + 0{,}42668\ \beta_{1i1j} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \; '_1 \; {}_1\hat{\underline{\beta}}_1) = 18\sigma^2 + [\beta_{1i1j}\,\beta_{1i1k}\,\beta_{1j1k}] \begin{bmatrix} 0{,}77189 & 0{,}11962 & 0{,}29940 \\ 0{,}11962 & 0{,}77189 & 0{,}29940 \\ 0{,}29940 & 0{,}29940 & 0{,}87510 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1i1j} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \Xi'_1 \Xi_1 \hat{\underline{\beta}}_1) = 18\sigma^2 + 0{,}77189(\beta^2_{1i1j} + \beta^2_{1i1k}) + 0{,}87510\ \beta^2_{1j1k} +$$
$$+ 0{,}23924\ \beta_{1i1j}\beta_{1i1k} + 0{,}59880(\beta_{1i1j}\beta_{1j1k} + \beta_{1i1k}\beta_{1j1k})$$

Para o modelo com seis parâmetros, dado pela equação F, teremos:

$$E(\hat{\underline{\beta}}_1) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1i} - 0{,}0416146\ \beta_{1j1k} \\ \beta_{1j} - 0{,}0416146\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{2i} + 0{,}1474215\ \beta_{1j1k} \\ \beta_{2j} + 0{,}4266851\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1i1j} - 0{,}219670\ \beta_{1k} + 0{,}306140\ \beta_{2k} + 0{,}1333109\ \beta_{1i1k} + 0{,}33366675\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'_1 \Xi_1 \Xi_1 \hat{\underline{\beta}}_1) =$$
$$= 19\sigma^2 + \begin{bmatrix} \beta_{1k}\beta_{2k}\beta_{1i1k}\beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}69325 & 0{,}06034 & 0{,}02628 & 0{,}06576 \\ 0{,}06034 & 0{,}55970 & -0{,}03662 & -0{,}09166 \\ 0{,}02628 & -0{,}03662 & 0{,}75594 & 0{,}25949 \\ 0{,}06577 & -0{,}09166 & 0{,}25949 & 0{,}77520 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

5 — VARIÂNCIA DOS TRATAMENTOS, PELOS DOIS MODELOS EM 10 PARÂMETROS

Através das expressões apresentadas nas páginas 33 e 46, foram calculadas as variâncias para a produção $\hat{Y}_{ijk}$ de cada um dos tratamentos, respectivamente para o modelo quadrático e com raiz quadrada.

Como alguns tratamentos apresentam variâncias iguais para a estimativa $\hat{Y}_{ijk}$ das produções, será dada uma nova ordem à apresentação dos mesmos.

Tratamento	Modelo quadrático	Modelo com raiz quadrada
111	**0,6940 σ^2**	**0,8046 σ^2**
222	**0,1857 σ^2**	**0,2274 σ^2**
333	**0,2273 σ^2**	**0,2075 σ^2**
444	**0,1857 σ^2**	**0,1593 σ^2**
555	**0,6940 σ^2**	**0,5855 σ^2**
152	**0,5525 σ^2**	**0,5642 σ^2**
125	**0,5525 σ^2**	**0,5642 σ^2**
541	**0,5525 σ^2**	**0,5417 σ^2**
514	**0,5525 σ^2**	**0,5417 σ^2**
351	**0,5133 σ^2**	**0,5072 σ^2**
315	**0,5133 σ^2**	**0,5072 σ^2**
412	**0,4348 σ^2**	**0,4857 σ^2**
421	**0,4348 σ^2**	**0,4857 σ^2**

Tratamento	Modelo quadrático	Modelo com raiz quadrada
245	0,4348 σ^2	0,3946 σ^2
254	0,4348 σ^2	0,3946 σ^2
213	0,3814 σ^2	0,4174 σ^2
231	0,3814 σ^2	0,4174 σ^2
435	0,3814 σ^2	0,3372 σ^2
453	0,3814 σ^2	0,3372 σ^2
134	0,2872 σ^2	0,2906 σ^2
143	0,2872 σ^2	0,2906 σ^2
523	0,2872 σ^2	0,2851 σ^2
532	0,2872 σ^2	0,2851 σ^2
324	0,1815 σ^2	0,1846 σ^2
342	0,1815 σ^2	0,1846 σ^2

As variâncias dos tratamentos situados perto do centro do delineamento tendem a ser menores, seja para a função quadrática, seja para a função com raiz quadrada.

Os resultados mostram uma correlação bastante alta para a magnitude das variâncias dos vários tratamentos, calculadas em função dos dois modelos.

6 — EXEMPLO

Para exemplo de análise do delineamento, foram simulados dados de experimentacão com milho, a partir de uma equação hipotética com valores dos parâmetros β_p baseados em resultados de vários anos de adubação dessa cultura, e com a atribuição de erros experimentais a cada um dos tratamentos, supondo uma variabilidade experimental da ordem de 8,5%.

A relação das produções de milho, em kg/ha, é dada a seguir:

Y_{111}	1960	Y_{245}	3638	Y_{324}	3639	Y_{453}	3788	Y_{532}	4230
Y_{222}	3080	Y_{351}	3486	Y_{435}	4220	Y_{514}	3372	Y_{143}	3797
Y_{333}	3870	Y_{412}	2904	Y_{541}	3771	Y_{125}	2491	Y_{254}	4104
Y_{444}	4120	Y_{523}	3217	Y_{152}	3042	Y_{231}	3340	Y_{315}	3116
Y_{555}	4730	Y_{134}	3630	Y_{213}	2478	Y_{342}	4279	Y_{241}	3148

6.1 — MODELO QUADRATICO

Para os dados de produção relacionados, foram calculadas as matrizes $\underline{\Xi}'\underline{Y}$ e $\underline{\beta} = S^{-1}\,\underline{\Xi}'\underline{Y}$ definidas às páginas 31 e 32.

$$\underline{\Xi}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 87500 \\ 10290 \\ 14720 \\ 6410 \\ -3170 \\ -7850 \\ -2800 \\ -1520 \\ 460 \\ 1970 \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_{1i} \\ \hat{\beta}_{1j} \\ \hat{\beta}_{1k} \\ \hat{\beta}_{2i} \\ \hat{\beta}_{2j} \\ \hat{\beta}_{2k} \\ \hat{\beta}_{1i1j} \\ \hat{\beta}_{1i1k} \\ \hat{\beta}_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3500{,}0000 \\ 205{,}8000 \\ 294{,}4000 \\ 128{,}2000 \\ -47{,}6789 \\ -129{,}1666 \\ -34{,}0044 \\ -13{,}9943 \\ 39{,}7232 \\ 16{,}7546 \end{bmatrix}$$

6.1.1 — EQUAÇÃO GERAL EM

$$Y_{ijk} = 3500,00\ \xi_0 + 205,80\ \xi_{1i} + 294,40\ \xi_{1j} + 128,20\ \xi_{1k} - 47,68\ \xi_{2i} - 129,17\ \xi_{2j} - 34,00\ \xi_{2k} - 13,99\ \xi_{1i1j} + 39,72\ \xi_{1i1k} + 16,75\ \xi_{1j1k}$$

em que $\xi_1 = \alpha_1 + X$

$\xi_2 = \alpha_2 + \gamma_2 X + X^2$

A redução na soma de quadrados, devida à adaptação da superfície de resposta com 10 parâmetros, é dada, em forma matricial, por $\underline{\beta}'\ \Xi'Y$. Conforme pôde ser notado no desenvolvimentto feito à página 34, os efeitos correspondentes a $\hat{\beta}_0$A (média), $\hat{\beta}_{1i}$B (nitrogênio linear), $\hat{\beta}_{1j}$C (fósforo linear), $\hat{\beta}_{1k}$D (potássio linear) são obtidos isoladamente, cada um deles com um grau de liberdade; os outros seis efeitos aparecem englobadamente, com seis graus de liberdade.

$$\underline{\beta}'\ \Xi'\underline{Y} = 3500,0000 \times 87500 + 205,8000 \times 10290 + 294,4000 \times 14720 + 128,2000 \times 6410 + + [-47,6789(-3170) - 129,1666(-7850) - 34,0044(-2800) - 13,9943(-1520) + + 39,7232 \times 460 + 16,7546 \times 1970]$$

ANÁLISE DA VARIANCIA

F.V.	S.Q.	G.L.	Q.M.	F
Total	316192490	25		
$\hat{\beta}_0$A (média)	306250000	1		
$\hat{\beta}_{1i}$B (nitrogênio linear)	2117682	1	2117682	23,76 **
$\hat{\beta}_{1j}$C (fósforo linear)	4333568	1	4333568	48,63 **
$\hat{\beta}_{1k}$D (potássio linear)	821762	1	821762	9,22 **
Termos quadráticos e interações	1332863	6	222143	2,49
Resíduo	1336614	15	89107	

Média	=	3500 kg/ha
Desvio-padrão	=	298 kg/ha
Coeficiente de variação	=	8,5%
Coeficiente de determinação	=	86,5%

As estimativas de variância e covariâncias dos $\hat{\beta}_p$ são encontradas a partir de

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}) = S^{-1}s^2$$

$\hat{V}(\hat{\beta}_0) = 3564$

$\hat{V}(\hat{\beta}_{1i}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{1j}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{1k}) = 1782$

$\hat{V}(\hat{\beta}_{2i}) = 1296;\ \hat{V}(\hat{\beta}_{2j}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{2k}) = 1483$

$\hat{V}(\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{1i1k}) = 1142;\ \hat{V}(\hat{\beta}_{1j1k}) = 1113$

$\hat{C}ov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{2j}) = \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{2k}) = 21;\ \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{2k}) = -2$

$\hat{C}ov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1i1k}) = 49;\ \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1j1k}) = -159$

$\hat{C}ov(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2k}\hat{\beta}_{1i1k}) = 5;$

$\hat{C}ov(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{1i1k}) = \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2k}\hat{\beta}_{1i1j}) = -490;\ \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{1j1k}) = \hat{C}ov(\hat{\beta}_{2k}\hat{\beta}_{1j1k}) = 147$

$\hat{C}ov(\hat{\beta}_{1i1j}\hat{\beta}_{1i1k}) = -13;\ \hat{C}ov(\hat{\beta}_{1i1j}\hat{\beta}_{1j1k}) = \hat{C}ov(\hat{\beta}_{1i1k}\hat{\beta}_{1j1k}) = -344$

6.1.2 — EQUAÇÃO GERAL EM X

$$Y_{ijk} = 521{,}20 + 414{,}69\,X_i + 1061{,}12\,X_j + 162{,}79\,X_k - 47{,}68\,X_i^2 - 129{,}17\,X_j^2 -$$
$$-34{,}00\,X_k^2 - 13{,}99\,X_iX_j + 39{,}72\,X_iX_k + 16{,}75\,X_jX_k$$

6.2 — MODELO COM RAIZ QUADRADA

Foram obtidas as matrizes:

$$\Xi'Y = \begin{bmatrix} A & = & 87500 \\ B & = & 3245 \\ C & = & 4707 \\ D & = & 2044 \\ E & = & -186 \\ F & = & -475 \\ G & = & -188 \\ H & = & -228 \\ I & = & -112 \\ J & = & 26 \end{bmatrix} ; \quad \hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & = & 3500{,}0000 \\ \hat{\beta}_{1i} & = & 692{,}2698 \\ \hat{\beta}_{1j} & = & 1007{,}8487 \\ \hat{\beta}_{1k} & = & 423{,}2806 \\ \hat{\beta}_{2i} & = & -315{,}3673 \\ \hat{\beta}_{2j} & = & -882{,}4143 \\ \hat{\beta}_{2k} & = & -207{,}9200 \\ \hat{\beta}_{1i1j} & = & -199{,}2565 \\ \hat{\beta}_{1i1k} & = & 336{,}2385 \\ \hat{\beta}_{1j1k} & = & 169{,}1732 \end{bmatrix}$$

6.2.1 — EQUAÇÃO GERAL EM ζ

$$Y_{ijk} = 3500\,\zeta_0 + 692{,}27\,\zeta_{1i} + 1007{,}85\,\zeta_{1j} + 423{,}28\,\zeta_{1k} - 315{,}37\,\zeta_{2i} -$$
$$-882{,}41\,\zeta_{2j} - 207{,}92\,\zeta_{2k} - 199{,}26\,\zeta_{1i1j} + 336{,}24\,\zeta_{1i1k} +$$
$$+169{,}17\,\zeta_{1j1k}$$

onde $\zeta_1 = -1{,}67646 + \sqrt{X}$

$\zeta_2 = 2{,}41157 - 3{,}22798\,\sqrt{X} + X$

Na redução da soma de quadrados, somente o termo correspondente à média é dado isoladamente.

ANALISE DA VARIANCIA

F.V.	S.Q.	G.L.	Q.M.	F
Total	316192490	25		
$\hat{\beta}_0 A$ (média)	306250000	1		
Regressão ($\hat{\beta}_{1i}B + \ldots + \hat{\beta}_{1j1k}J$) = LQI	8386739	9	931859	8,98 **
Resíduo	1555750	15	103716	

Média	=	3500 kg/ha
Desvio-padrão	=	322
Coeficiente de variação	=	9,2%
Coeficiente de determinação	=	84,3%

As estimativas de variância e covariância dos $\hat{\beta}_p$ são encontradas a partir de

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}) = S^{-1}s^2$$

$\hat{V}(\hat{\beta}_0) = 4149;\ \hat{V}(\hat{\beta}_{1i}) = 22163;\ \hat{V}(\hat{\beta}_{1j}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{1k}) = 22165;$

$\hat{V}(\hat{\beta}_{2i}) = 164444;\ \hat{V}(\hat{\beta}_{2j}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{2k}) = 189324$

$\hat{V}(\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{V}(\hat{\beta}_{1i1k}) = 155029;\ \hat{V}(\hat{\beta}_{1j1k}) = 153880$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1k}) = -89;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{2i}) = -944;$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\ \hat{\beta}_{2j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{2k}) = 918;$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1i1k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{1j1k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1k}\hat{\beta}_{1j1k}) = -2150;$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i}\hat{\beta}_{1j1k}) = 6404;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{1k}) = -7;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{2i}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1k}\hat{\beta}_{2i}) = 317;$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{2j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1k}\hat{\beta}_{2k}) = -2752;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{2k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1k}\hat{\beta}_{2j}) = 71;$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1k}\hat{\beta}_{1i1k}) = -166;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1j}\hat{\beta}_{1i1k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1k}\hat{\beta}_{1i1j}) = 6451$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{2j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{2k}) = -3251;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1i1k}) = 7618$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2i}\hat{\beta}_{1j1k}) = -22685;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{2k}) = -724$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{1i1j}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2k}\hat{\beta}_{1i1k}) = 1698$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{1i1k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2k}\hat{\beta}_{1i1j}) = -66148$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2j}\hat{\beta}_{1j1k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{2k}\hat{\beta}_{1j1k}) = 22050$

$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i1j}\hat{\beta}_{1i1k}) = -3980;\ \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i1j}\hat{\beta}_{1j1k}) = \hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{1i1k}\hat{\beta}_{1j1k}) = -51678$

6.2.2 — EQUAÇÃO GERAL EM X

$$\begin{aligned} Y_{ijk} = & -2589{,}29 + 1480{,}62\ \sqrt{X_i} + 3906{,}70\ \sqrt{X_j} + 247{,}14\ \sqrt{X_k} + \\ & -315{,}37\ X_i - 882{,}41\ X_j - 207{,}92\ X_k - 199{,}26\ \sqrt{X_iX_j} + \\ & + 336{,}24\ \sqrt{X_iX_k} + 169{,}17\ \sqrt{X_jX_k} \end{aligned}$$

7 — DETERMINAÇÃO DA FORMA GERAL DA SUPERFÍCIE

A partir da equação paramétrica estimada, foi determinada a equação canônica, para verificar se a superfície apresentava ponto de máximo, de mínimo ou de sela. Para os dois modelos foram obtidos valores de λ negativos; tivemos, assim, ponto de máximo, sendo a superfície adaptada um elipsóide.

8 — ESTIMATIVAS DAS PRODUÇÕES $\hat{Y}_{ijk}$ E DE SUAS VARIÂNCIAS, PELOS DOIS MODELOS

Estimados os parâmetros β, compõe-se o modelo polinomial e se calculam os valores esperados $\hat{Y}_{ijk}$ para os tratamentos do experimento. Damos a seguir os valores esperados, as estimativas das variâncias, as grandezas $t\sqrt{\hat{V}(\hat{Y})}$ (com $t=2{,}13$, para 15 graus de liberdade do resíduo e $\alpha=0{,}05$) e os intervalos de confiança para $\hat{Y}$, nos modelos quadrático e com raiz quadrada, usando a equação polinomial em 10 parâmetros.

Tratamento	Produção: Y kg/ha	MODELO QUADRÁTICO: Estimativa Produção: Y kg/ha	$\hat{V}(\hat{Y})$	$t\sqrt{\hat{V}(\hat{Y})}$ kg/ha	Intervalo de Confiança de $\hat{Y}$ kg/ha	MODELO COM RAIZ QUADRADA: Estimativa Produção: $\hat{Y}$ kg/ha	$\hat{V}(\hat{Y})$	$t\sqrt{\hat{V}(\hat{Y})}$ kg/ha	Intervalo de Confiança de $\hat{Y}$ kg/ha
111	1960	1991	61840	529,7	1461 — 2521	1945	83450	615,3	1329 — 2560
222	3080	3124	16547	274,0	2850 — 3398	3179	23585	327,1	2851 — 3506
333	3870	3921	20254	303,1	3617 — 4224	3870	21521	312,5	3557 — 4183
444	4120	4381	16547	274,0	4107 — 4655	4281	16522	273,8	4007 — 4555
555	4730	4505	61840	529,7	3975 — 5035	4512	60725	524,9	3987 — 5037
152	3688	3921	49232	472,6	3448 — 4394	3926	58516	515,2	3410 — 4441
125	3486	3534	49232	472,6	3061 — 4007	3580	58516	515,2	3064 — 4095
541	2904	2833	49232	472,6	2360 — 3306	2860	56183	504,9	2355 — 3365
514	3217	3747	49232	472,6	3274 — 4220	3795	56183	504,9	3290 — 4300
351	3630	3334	45739	455,5	2878 — 3790	3271	52605	488,5	2782 — 3760
315	3639	3575	45739	455,5	3119 — 4030	3606	52605	488,5	3117 — 4095
412	4220	4279	38744	419,2	3859 — 4698	4211	50375	478,1	3732 — 4689
421	3771	3695	38744	419,2	3275 — 4114	3666	50375	478,1	3187 — 4144
245	3042	3331	38744	419,2	2911 — 3750	3398	40926	430,9	2967 — 3829
254	2478	2534	38744	419,2	2114 — 2953	2537	40926	430,9	2106 — 2968
213	3788	4123	33985	392,7	3730 — 4516	4167	43291	443,2	3723 — 4611
231	3372	3233	33985	392,7	2840 — 3626	3228	43291	443,2	2784 — 3672
435	2491	2795	33985	392,7	2402 — 3188	2854	34973	398,3	2455 — 3253
453	3340	3355	33985	392,7	2962 — 3748	3312	34973	398,3	2913 — 3711
134	4279	3907	25591	340,7	3566 — 4248	3858	30140	369,8	3488 — 4228
143	4230	3900	25591	340,7	3559 — 4241	3903	30140	369,8	3533 — 4273
523	3797	3512	25591	340,7	3171 — 3853	3433	29569	366,3	3066 — 3800
532	4104	3856	25591	340,7	3515 — 4197	3937	29569	366,3	3570 — 4304
324	3116	2869	16173	270,8	2598 — 3140	2901	19146	294,7	2606 — 3196
342	3148	3231	16173	270,8	2960 — 3502	3257	19146	294,7	2962 — 3552

9 — CONCLUSÕES

Nas pesquisas com fertilizantes, o objetivo principal é, na maioria das vezes, chegar-se finalmente à análise econômica de experimentos ou grupos de experimentos, com vistas às recomendações da adubação.

Usando uma amplitude apropriada nas dosagens, evitando platô nas respostas, este grupo de delineamentos possibilita uma análise mais eficiente da curvatura da superfície de resposta na área da decisão econômica.

O delineamento (1/5) (5x5x5) proposto apresenta tamanho conveniente para os ensaios de adubação; possibilita análise por vários modelos, como o quadrático, o com raiz quadrada, Mitscherlich e outros. Para os dois modelos desenvolvidos, se as interações forem negligíveis, todos os componentes serão estimados independentemente.

Podem ser adicionados ao delineamento alguns tratamentos extras para melhor abrangência de objetivos; o tratamento 000, os tratamentos 333 + calcário e 333 + calcário + micronutrientes possibilitam detectar o incremento devido à adubação, o incremento devido ao uso do calcário e o devido ao uso de calcário e micronutrientes, em relação à dose média de NPK utilizada; podem ser usadas duas repetições para cada tratamento extra incluído.

Se se desejar uma estimativa da variação experimental para pôr em prova a adequação dos modelos, podem ser adicionados mais quatro ou cinco pontos no nível 333, o que não altera substancialmente a análise, ficando ainda o delineamento com tamanho adequado para uso na agricultura.

Ponto essencial a ser considerado é efetuar a escolha adequada dos níveis dos fatores e fazer com que o máximo da função esteja preferivelmente incluído no intervalo constituído pelos níveis experimentados e que esse máximo esteja entre o 4.º e o 5.º nível utilizado para cada fator. Assim evitam-se platôs desnecessários e que reduzem a informação, porque se situam fora da área da tomada das decisões econômicas.

DESIGNS (1/5) (5^3)

SUMMARY

The statistical solutions for quadratic and square root polynomials for a group of special 1/5 (5^3) fractional factorial, aiming, primarily, its application to fertilizer experiments are reported.

These factorial designs were originated by the superposition of three of the four existing orthogonal 5x5 latin squares. Three basic designs are obtained: I-II-III, I-II-IV, and I-III-IV; the last one is presented below.

111	245	324	453	532
222	351	435	514	143
333	412	541	125	254
444	523	152	231	315
555	134	213	342	421

The quadratic model of second order with ten parameters is:

$$Y_{ijk} = \beta_0 \xi_0 + \beta_{1i}\xi_{1i} + \beta_{1j}\xi_{1j} + \beta_{1k}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2i} + \beta_{2j}\xi_{2j} + \beta_{2k}\xi_{2k} +$$
$$+ \beta_{1i1j}\xi_{1i}\xi_{1j} + \beta_{1i1k}\xi_{1i}\xi_{1k} + \beta_{1j1k}\xi_{1j}\xi_{1k} + e_{ijk} \qquad (1)$$

where $\xi_{1m} = \alpha_1 + X_m$, $\xi_{2m} = \alpha_2 + \gamma_2 X_m + X_m^2$, $m = i,j,k$, each factor varying from 1 to 5, with the orthogonality conditions:

$\sum \xi_{1m} = 0$, $\sum \xi_{2m} = 0$, $\sum \xi_{1m}\xi_{2m} = 0$, giving $\xi_{1m} = -3 + X_m$ and $\xi_{2m} = 7 - 6X_m + X_m^2$; so $\xi_{11} = -2$, $\xi_{12} = -1$, $\xi_{13} = 0$, $\xi_{14} = +1$, $\xi_{15} = +2$, $\xi_{21} = 2$, $\xi_{22} = -1$, $\xi_{23} = -2$, $\xi_{24} = -1$, $\xi_{25} = 2$.

The linear regression coefficient for each factor can be estimated independently; the quadratic and the linear x linear interaction coefficients are estimated from a 6x6 full matrix. Consequently in the analysis of variance the linear sums of squares for each factor are independent but the quadratic and interactions sums of squares for all factors are entangled and should be jointly tested. If the contribution of a factor and its respective interaction with the others are negligible, independent estimators of the linear and quadratic regression of the other two factors and the correspondent interaction can be calculated, with correspondent parallelism in the analysis of variance. On the other hand, if the factors are important but its interactions are negligible, the linear and quadratic coefficients for each factor are estimated independently.

The square root polynomial model may be represented as in (1) with the values:

$\xi_{1m} = \alpha_1 + \sqrt{X_m}$ and $\xi_{2m} = \alpha_2 + \gamma_2\sqrt{X_m} + X_m$, where $m = i,j,k$; $\sum \xi_{1m} = 0$, $\sum \xi_{2m} = 0$ and $\sum \xi_{1m}\xi_{2m} = 0$ giving:

$\xi_{1m} = -1{,}67646 + \sqrt{X_m}$, $\xi_{2m} = 2{,}41157 - 3{,}22798\sqrt{X_m} + X_m$; $\xi_{11} = -0{,}67646$, $\xi_{12} = -0{,}26226$, $\xi_{13} = 0{,}05554$, $\xi_{14} = 0{,}32354$, $\xi_{15} = 0{,}55964$;

$\xi_{21} = 0{,}18359$, $\xi_{22} = -0{,}15342$, $\xi_{23} = -0{,}17928$, $\xi_{24} = -0{,}04438$ and $\xi_{25} = 0{,}19349$, for each factor i,j,k.

Regarding this model, with the exclusion of β_0, the coefficients for each factor and the square-root interactions are estimated from a full 9x9 symetric matrix. In ~~consequence, with the exception of β_0, the sums of squares correspondent to the other~~ coefficients are tested together.

Equivalent properties to the quadratic model hold true for the square root model, when the interactions or when one main factor and its interactions are negligible.

Assuming no interaction, the Mitscherlich model $Y = A\,[1 - 10^{-c(x+b)}]$, can be used for evaluation of each factor response from the corresponding marginal totals. An extra evaluation from the main diagonal of the design can be obtained, representing the response to increasing amounts of the three factors at equal levels.

In case of fertilizer experiments, treatments like 000 should be added as extra points to the 25 used in this design, in order to allow the determination of the increment due to the use of macronutrient combinations and their costs.

Using proper range of dosages (avoiding plateau responses), as it should be in npk fertilizer experiments, this group of designs allows a more efficient analysis of the curvature of the surface functions on the area of economical decision. If the models are used without interactions, the independent estimation of the parameters for the quadratic, square-root and Mitscherlich models can be very easily achieved. These properties are of great interest in the economical studies of fertilization programs for developing countries.

With the help of a net of experiments of this type, economical studies of fertility nature with macronutrients as nitrogen, phosphorus, and potassium, for example, can be obtained with five different levels of each factor, with experiments of medium size.

LITERATURA CITADA

1. ALVAREZ, R.; ARRUDA, H. V. & GARGANTINI, H. Adubação da cana de açúcar. Ensaio preliminar de adubação NPK em terra-roxa. Bragantia 19:361-368, 1960.

2. ANDERSON, R. L. & BANCROFT, T. A. Statistical Theory in Research. New York, Mc Graw-Hill, 1952.

3. ———— & NELSON, L. A. A family of models involving intersecting straight lines and concomitant experimental designs useful in evaluating response to fertilizer nutrients. Biometrics 31:303-318, 1975.

4. BOX, G. E. P. Multifactor design of first order. Biometrika 39:49-57, 1952.

5. ———— & HUNTER, J. S. Multifactor experimental designs for exploring response surfaces. Ann. Math. Statist. 28:195-241, 1957.

6. ———— & WILSON, K. B. On the experimental attainment of optimum conditions. J. R. Statist. Soc. B 13:1-45, 1951.

7. COCHRAN, W. G. COX, G. M. Experimental Designs. (Second Edition). John Wiley and Sons, New York, 1957.

8. CONAGIN, A.; JORGE, J. P. N. & VENTURINI, W. R. Delineamentos experimentais utiizáveis na experimentação de campo. In: Reynaert, E. E. La investigación de fertilidad de suelos para la producción agrícola en la zona templada. Montevideo, IICA — Zona Sur., 1969. p. 171-182.

9. CROWTER, E. M. & YATES, F. Fertilizer policy in war-time. Empire J. Exp. Agric. 9-77-97, 1941.

10. DAVIES, O. L. ed. Design and Analysis of Industrial Experiments. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1954.

11. DE BAUN, R. M. Block effects in the determination of optimum conditions. Biometrics 12:20-22, 1956.

12. DRAPER, N. R. & SMITH, H. Applied Regression Analysis. New York, J. Wiley and Sons, 1966.

13. FINNEY, D. J. The fractional replication of factorial arrangements. Ann. Eugen. 12:291-301, 1945.

14. FISHER, R. A. The Design of Experiments. (Fourth Edition). New York, Hafner, 1947.

15. ———— & YATES, F. Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research (Fourth Edition). Edinburgh, Oliver and Boyd, 1953.

16. FUZATTO, M. G.; VENTURINI, W. R. & CAVALERI, P. A. Estudo técnico-econômico da adubação do algodoeiro no Estado de São Paulo. Campinas, Instituto Agronômico, 1970. 15 p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA-1)

17. GRAYBILL, F. A. An Introduction to Linear Statistical Models. New York, McGraw-Hill, 1961. (v. 1)

18. IGUE, T.; MASCARENHAS, H. A. A. & MIYASAKA, S. Estudo comparativo dos métodos de Mitscherlich e do trinômio do segundo grau, na determinação das doses mais econômicas de fertilizantes, na adubação do feijoeiro (**Phaseolus vulgaris** L.). Campinas, Instituto Agronômico, 1971. 15 p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA-4)

19. JOHN, P. W. M. Statistical Design and Analysis of Experiments. New York, Macmillan, 1971.

20. MEADE, R. & PIKE, D. J. A review of response surface methodology from a biometric viewpoint. Biometrics 31:803-851, 1975.

21. MIRANDA, L. T. Adubação do milho. I — Relação entre dados de ensaios de campo e de análise química do solo. Campinas, Instituto Agronômico, 1971. 11p. (Projeto BNDE/ANDA/CIA-11)

22. MITSCHERLICH, E. A. Die Bestimmung des Düngerbedurfnisses des Bodens. Berlin, Paul Parey, 1925.

23. MYERS, R. H. Response Surface Methodology. Boston, Allyn and Bacon, 1971.

24. PÁEZ, G. & SILVA, T. Delineamento dos experimentos de adubação, Departamento de Processamento de Dados. Embrapa, 1975. 50p. (Mimeografado)

25. REED, L. J. & BERKSON, J. The application of the logistic function for experimental data. J. Phys. Chem. 33:760-799, 1929. (Original não consultado; extraído de Meade, R. & Pike, D. J.).

26. RICHARDSON, H. L. Field experiment programmes. Outlook on Agriculture 1(3):87-94, 1956. (Tradução de A. Conagin. Campinas, Instituto Agronômico, 1957. 11 fls. (Mimeografado)

27. TEJÉDA; H. Consideraciones sobre diseños experimentales en la investigación de campo en fertilidad de suelo. **In:** Reynaert, E. E. La investigación de fertilidad de suelos para la producción agrícola en la zona templada. Montevideo, IICA — Zona Sur, 1969. p. 171-182.

28. TRAMEL, T. E. A suggested procedure for agronomic economic fertilizer experiments. **In** Baum, E. L. and others. Economic and Technical analysis of fertilizer innovations and resource use. Ames, Iowa State College Press, 1957. p. 168-175.

29. VIEIRA, S. Aspectos das funções de produção ajustadas aos ensaios fatoriais 3^3 de adubação. Piracicaba, ESALQ, 1970. 165 p. (Tese de Doutoramento)

30. VOSS, R. & PESEK, J. T. Yield of corn as affected by fertilizer rates and environmental factors. Agronomy J. 59:567-572, 1967. (Original não consultado; extraído de Tejéda, H.).

31. WINSOR, C. P. The Gompertz curve as a growth curve. Proc. Natl. Acad. Sci. 18:1-8, 1932. (Original não consultado; extraído de Meade R. & Pike, D. J.).

32. WISHART, J. Growth rate determination in nutrition studies with the bacon pig, and their analysis. Biometrika 30:16-28, 1938.

B R A G A N T I A

Revista Científica do Instituto Agronômico do Estado de São Paulo

Vol. 36 Campinas, janeiro de 1977 N.º 3

DELINEAMENTOS (1/5)(5^3)

ARMANDO CONAGIN e JOASSY DE PAULA NEVES JORGE [2], *Divisão de Plantas Alimentícias Básicas, Instituto Agronômico*

C O R R E Ç Õ E S

Pág. 26: linha 32, da 1ª col., onde está $X_i X_j$, leia-se: $X_{iu} X_{ju}$

linha 7, da 2ª col., onde está $\sum_{i=1}^{k}$, leia-se: $+\sum_{i=1}^{k}$

onde está $X_i X_j$, leia-se: $X_{iu} X_{ju}$

Pág. 29: linha 15, onde estão 1 e 2, leiam-se ξ_1 e ξ_2

linha 16, leia-se: dos ξ

linha 33, onde está: do delineamento, leia-se: das variáveis independentes

linha 35, leia-se: $\underline{Y} = \Xi\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$ ou $\underline{\varepsilon} = \underline{Y} - \Xi\underline{\beta}$

Pág. 30: linha 15, onde está: os Ξ correspondentes, leia-se: os ξ correspondentes

linha 19, cancelem-se os colchetes dos ξ

Pág. 31: linha 23, leia-se: $\Xi'\underline{Y}$

Pág. 32: linha 28, leia-se: $\hat{\underline{\beta}}$

linha 34, leia-se: $= S^{-1}\Xi'E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')\Xi S^{-1}$

Pág. 33: linha 8, em lugar de $10^{-6}(236)$, leia-se: $10^{-6}(-236)$

linha 14, leia-se: Seja $\underline{\Xi}'_{ijk}$

linha 28, leia-se: $\underline{\hat{\beta}}'\Xi'\underline{Y}$

Pág. 34: linha 2, em lugar de: +5551 I - 1785 J E +, leia-se: +551 I - 1785 J)E +

linha 5, onde está: -2858 J, leia-se: -3858J

linha 10, leia-se: $\Sigma Y^2_{ijk} = T$

Pág. 35: linha 33, leia-se: $S^{-1}_{II} =$

Pág. 36: linha 15, onde está: $\Xi_1\underline{Y}$, leia-se: $\Xi'_1\underline{Y}$

linha 16, onde está: A esperança de $\underline{\beta}_1$, leia-se: A esperança de $\underline{\hat{\beta}}_1$

Pág. 36: linha 18, onde está: $\varepsilon(\underline{\hat{\beta}}_1)$, leia-se $E(\underline{\hat{\beta}}_1)$ e onde está: $+ S^{-1}$, leia-se: $+ S^{-1}_1$

linha 30, onde está: S^{-1}, leia-se: S^{-1}_1

linha 37, onde está: $E\underline{\hat{\beta}}_1$, leia-se: $E(\underline{\hat{\beta}}_1)$

Pág. 37: linha 7, onde está: $(N-q)\sigma^2\ \underline{\beta}'_2($, leia-se: $=(N-q)\sigma^2+\underline{\beta}'_2($

linha 23, onde está: $\underline{\hat{\beta}}_1\Xi'_1\ {}_1\underline{\hat{\beta}}_1$, leia-se: $\underline{\hat{\beta}}'_1\Xi'_1\Xi_1\underline{\hat{\beta}}_1$

Pág. 39: linha 15, onde está: $M\underline{\hat{\beta}}_2$, leia-se: $M\underline{\beta}_2$

linha 28, primeira matriz, leia-se:

$$0 \quad \frac{3}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{10}$$

Pág. 41: a partir d linha 22, leia-se:

$$+ \begin{bmatrix} \beta_{1k} & \beta_{2k} & \beta_{1i1k} & \beta_{1j1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & \frac{547}{7} & 1 \\ 0 & -3 & 1 & \frac{547}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{1i1k} \\ \beta_{1j1k} \end{bmatrix}$$

Pág. 42: linha 12, leia-se: $\xi_{13} = 0{,}05554$

Pág. 43: Na linha correspondente ao tratamento 523, substituir os valores: -0,04438 por -0,17928; -0,03757 por -0,14677; -0,21886 por 0,03108; e 0,01796 por -0,01456

Na linha correspondente ao tratamento 134, trocar os valores: -0,17928 por -0,04438; -0,14677 por -0,03757; 0,03108 por -0,21886; e -0,01456 por 0,01796

Pág. 44: linha 16, onde está: -62203, leia-se: 62203

linha 22, onde está: -498286, leia-se: -498268

Pág. 45: linha 6, onde está: -067646, leia-se: -0,67646

Pág. 47: linha 18, onde está: Y_{ijk}, leia-se: $\hat{Y}_{ijk}$

linhas 18 a 24, todos os β devem ser substituídos por $\hat{\beta}$

linha 23, onde está: $X_{2k}X_k$, leia-se: $\hat{\beta}_{2k}X_k$

Pág. 48: linha 2, onde está: e S, leia-se: e S_I^{-1}

na última linha, onde está: $\underline{\hat{\beta}}_1' \ 1 \ 1 \ \underline{\hat{\beta}}_1$, leia-se: $\underline{\hat{\beta}}_1' \Xi_1' \Xi_1 \underline{\hat{\beta}}_1$

Pág. 49: linha 10, onde está: $\Xi_1 \Xi_1$, leia-se: $\Xi_1' \Xi_1$

Pág. 50: linha 29, onde está: Y_{241}, leia-se: Y_{421}

linha 31, onde está: $\Xi' Y$, leia-se: $\Xi' \underline{Y}$

linha 32, onde está: $\underline{\beta} = S^{-1} \Xi' Y$, leia-se: $\underline{\hat{\beta}} = S^{-1} \Xi' \underline{Y}$

No final da página, falta o sinal = entre as duas matrizes que representam os vetores $\Xi' \underline{Y}$ e $\underline{\hat{\beta}}$

Pág. 51: linha 1, escreva-se: Equação geral em ξ

linha 2, em lugar de Y_{ijk}, leia-se: $\hat{Y}_{ijk}$

linha 3, onde está: 34,00, leia-se: -34,00

linha 7, leia-se $\underline{\hat{\beta}}' \Xi' \underline{Y}$

linha 29, onde está: Cov $(\hat{\beta})$, leia-se: $\widehat{\text{Cov}}\ (\underline{\hat{\beta}})$

Pág. 52: linha 2, leia-se $\hat{Y}_{ijk}$

linha 10, leia-se $\Xi' \underline{Y}$

linha 17, leia-se $\hat{Y}_{ijk}$

Pág. 53: linha 2, onde está: Cov $(\hat{\beta})$, leia-se: $\hat{C}ov$ $(\hat{\underline{\beta}})$

linha 19, onde está: Y_{ijk}, leia-se $\hat{Y}_{\underline{ijk}}$ e onde está: $+247,14\sqrt{X_k}$ +, leia-se: $+247,14\sqrt{X_k}$ -

Pág. 54: 3ª col., onde está: Y, leia-se $\hat{Y}$

Nas 6ª, 7ª e 10ª col., onde está: $\hat{Y}$kg/ha, leia-se: $\hat{Y}$(kg/ha)

Pág. 56: linha 22, os números devem ser lidos: -1.67646; 2.41157; -3.22798; -0.67646

linha 23, leiam-se os seguintes números: -0.26226; 0.05554; 0.32354; 0.55964

linha 24, ler: 0.18359; -0.15342; -0.17928; -0.04438

linha 25, leia-se: 0.19349